集中講義

非可換空間の基礎の非果敢なreview

白石　清（山口大学理学部）

平成26年6月15日

概 要

ていうか，review になってない。

目 次

1　座標と微分

1.1　座標

座標がまともな「数」でなく，非可換であるとしよう。

$$\left[x^i, x^j\right] = i\theta^{ij} \tag{1}$$

ただし θ^{ij} は実で，$\theta^{ji} = -\theta^{ij}$。また，$\theta$ は逆 θ^{-1} を持つとする。

1.2　微分

微分は，

$$\partial_i x^j = \delta_i^j \tag{2}$$

となるように定義する。

座標の関数 $f(x)$ の微分は

$$\partial_i f = \left[-i(\theta^{-1})_{ij}x^j, f\right] \tag{3}$$

と書ける。

$f = x^k$ の場合，確かに

$$\begin{aligned}\partial_i x^k &= -i(\theta^{-1})_{ij}\left[x^j, x^k\right] \\ &= -i(\theta^{-1})_{ij} i\theta^{jk} = \delta_i^k \end{aligned} \tag{4}$$

f も演算子的に考え，つまり，後ろにぶち当たる ψ とかあったりすると思えば

$$\left[\hat{\partial}_i, f\right]\psi = \left[-i(\theta^{-1})_{ij}x^j, f\right]\psi \tag{5}$$

（区別のため notation をこそっとかえた。）というわけで，

$$\hat{\partial}_i = -i(\theta^{-1})_{ij}x^j \tag{6}$$

を使うこともできる。使い方に注意。このとき

$$\begin{aligned}\left[\hat{\partial}_i, \hat{\partial}_j\right] &= \left[-i(\theta^{-1})_{ik}x^k, -i(\theta^{-1})_{j\ell}x^\ell\right] \\ &= -(\theta^{-1})_{ik}(\theta^{-1})_{j\ell} i\theta^{k\ell} \\ &= -i(\theta^{-1})_{ji} = i(\theta^{-1})_{ij}\end{aligned} \tag{7}$$

これも普通でないね。（$\hat{\partial}_i$ を $U(1)$ ゲージ場を含んだ共変微分と思えば，右辺が磁場に見えてくる，よね。）

2　並進と平面波

2.1　並進

並進を

$$x^i \to x^i + a^i \tag{8}$$

とする。

無限小の場合，$x^i \to x^i + \epsilon^i$ で $f \to f + \delta f = f + \epsilon^i \partial_i f$。
したがって[1]

$$f(x^i + a^i) = e^{-i(\theta^{-1})_{ij}a^i x^j} f(x) e^{i(\theta^{-1})_{ij}a^i x^j} \tag{9}$$

2.2　平面波

平面波 $e^{ik\cdot x}$ は次を満たすとする。

$$\partial_j e^{ik\cdot x} = ik_j e^{ik\cdot x} \tag{10}$$

普通の exponential でいいみたい。

ただ積を考えると

$$e^{ik\cdot x} \cdot e^{ik'\cdot x} = e^{-\frac{i}{2}\theta^{ij}k_i k'_j} e^{i(k+k')\cdot x} \tag{11}$$

となる。（これは，なんとかいう公式[2]　からでるよね。）

また[3]

$$e^{ik\cdot x} \cdot f(x) \cdot e^{-ik\cdot x} = f(x^i + \theta^{ij}k_j) \tag{12}$$

この関係は,（エネルギー）運動量が大きいと，非局在性が大きいことを表している。

[1] Baker-Campbell-Hausdorff formula
$e^A B e^{-A} = B + [A, B] + \cdots$

[2] これも Baker-Campbell-Hausdorff formula というのでした。
$e^A e^B = e^{A+B+\frac{1}{2}[A,B]+\cdots}$

[3] 前の並進の式 (9) で $k_j = -(\theta^{-1})_{ij}a^i$ とおく。

3　非可換トーラス

3.1　基底

通常の空間で

$$f(x^i) = f(x^i + 2\pi n^i) \tag{13}$$

（n^i は整数）となるような関数を考えることに相当。その基底は

$$u_j = e^{ix^j} \tag{14}$$

２次元空間では，トーラス上の任意関数は

$$f(x^1, x^2) = \sum_{n,m\in\mathbf{Z}} a_{nm} u^n v^m \tag{15}$$

と表せる。ここで

$$u = e^{ix^1}, \qquad v = e^{ix^2} \tag{16}$$

非可換空間では

$$e^{ix^i} \cdot e^{ix^j} = e^{-\frac{i}{2}\theta^{ij}} e^{i(x^i + x^j)} \tag{17}$$

$$e^{ix^j} \cdot e^{ix^i} = e^{-\frac{i}{2}\theta^{ji}} e^{i(x^i + x^j)} = e^{\frac{i}{2}\theta^{ij}} e^{i(x^i + x^j)} \tag{18}$$

であるので

$$U_j = e^{ix^j} \tag{19}$$

と書くと

$$U_i U_j = e^{-i\theta^{ij}} U_j U_i \tag{20}$$

の関係が成り立つ。
なんとなく量子群的変形を思い浮かべる。

２次元非可換空間

$$\left[x^1, x^2\right] = i\theta \tag{21}$$

では,

$$U = e^{ix^1}, \qquad V = e^{ix^2} \tag{22}$$

と書くと

$$UV = e^{-i\theta} VU \tag{23}$$

の関係が成り立つ。

3.2 Fuzzy torus

互いに素な整数 p，N があって，$\omega = e^{2\pi i p/N}$ とする。
２つの $N \times N$ 行列

$$U = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & \omega & & & \\ & & \omega^2 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & \omega^{N-1} \end{pmatrix}, \qquad V = \begin{pmatrix} & 1 & & & \\ & & 1 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 1 \\ 1 & & & & \end{pmatrix} \tag{24}$$

をつくると，

$$UV = e^{-2\pi i p/N} VU \tag{25}$$

を満たすので，

$$\theta = 2\pi \frac{p}{N} \tag{26}$$

の場合に対応する。この特殊な場合を Fuzzy torus と呼ぶ。

特殊である。

基底は全部数えて $N \times N$ 個と，有限である。

4 ２次元非可換空間とフォック空間による表現

$$\left[x^1, x^2\right] = i\theta \tag{27}$$

ただし $\theta > 0$ とする。

$z \equiv x^1 + ix^2$ とすると

$$[z, \bar{z}] = -i\left[x^1, x^2\right] + i\left[x^2, x^1\right] = 2\theta \tag{28}$$

$$a \equiv \frac{1}{\sqrt{2\theta}}\,z, \qquad a^\dagger \equiv \frac{1}{\sqrt{2\theta}}\,\bar{z} \tag{29}$$

とすれば

$$\left[a, a^\dagger\right] = 1 \tag{30}$$

a，$a^\dagger$ を消滅，生成演算子と見たときのフォック空間を考え，

$$f(x^1, x^2) = \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} f_{mn}|m\rangle\langle n| \tag{31}$$

と表すことが出来る。ただし $a^\dagger a|m\rangle = m|m\rangle$。

特に，軸対称な場合，

$$f(x^1, x^2) = \sum_{m=0}^{\infty} f_m|m\rangle\langle m| \tag{32}$$

で表される。

<u>ex.</u>

$$|0\rangle\langle 0| =: e^{-a^\dagger a} := \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!}a^{\dagger k}a^k \tag{33}$$

を示せ。

5 star積

5.1 Weyl-Moyal star product

座標が普通の数でないと思うかわりに，積が普通の積でないと思ってみてはどうだろう。

$$x^i \star x^j - x^j \star x^i = \left[x^i, x^j\right]_\star = i\theta^{ij} \tag{34}$$

Weyl-Moyal star product を次のように定義する。

$$(f \star g)(x) \equiv e^{\frac{i}{2}\theta^{ij}\partial_i \partial'_j} f(x) g(x')\Big|_{x'=x} \tag{35}$$

（ここで x は普通の数，∂_i なども普通の微分。）[4]

例1　$f(x) = x^i$，$g(x) = x^j$ のとき

$$x^i \star x^j = x^i x^j + \frac{i}{2}\theta^{ij} \tag{38}$$

したがって

$$x^i \star x^j - x^j \star x^i = \left[x^i, x^j\right]_\star = i\theta^{ij} \tag{39}$$

を満たす。

例2　$f(x) = e^{ik\cdot x}$，$g(x) = e^{ik'\cdot x}$ のとき

$$e^{ik\cdot x} \star e^{ik'\cdot x} = e^{-\frac{i}{2}\theta^{ij}k_i k'_j} e^{i(k+k')\cdot x} \tag{40}$$

はすぐにわかりますね？

[4] 場合によっては，以下のように書いたほうがよい：

$$(f \star g)(x) \equiv \exp\left[\frac{i}{2}\theta^{ij}\frac{\partial}{\partial x_1^i}\frac{\partial}{\partial x_2^j}\right] f(x_1) g(x_2)\Big|_{x_1=x_2=x} \tag{36}$$

もっと気になるときは，こう書こう。

$$(f \star g)(x) \equiv \exp\left[\frac{i}{2}\theta^{ij}\frac{\partial}{\partial \xi^i}\frac{\partial}{\partial \eta^j}\right] f(x+\xi) g(x+\eta)\Big|_{\xi=\eta=0} \tag{37}$$

5.2　フーリエ変換

積分は普通でよくなるので，割と楽。
$f(x)$ のフーリエ変換を

$$\tilde{f}(k) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int d^n x \, e^{ik\cdot x} f(x) \tag{41}$$

とすると，

$$\widetilde{f \star g}(k) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int d^n k' e^{\frac{i}{2}\theta^{ij} k_i k'_j} \tilde{f}\left(\frac{1}{2}k + k'\right) \tilde{g}\left(\frac{1}{2}k - k'\right) \tag{42}$$

<u>ex.</u> これを示せ。

というわけで，$k = 0$ とすれば簡単に

$$\int d^n x \, (f \star g)(x) = \int d^n x \, f(x) g(x) \tag{43}$$

がわかります。
したがって

$$\int d^n x \, (f \star g)(x) = \int d^n x \, (g \star f)(x) \tag{44}$$

です。（ちょっとほっとした？）

5.3　結合則

Weyl-Moyal star product は，結合則を満足する。

$$[f \star (g \star h)](x) = [(f \star g) \star h](x) \tag{45}$$

これを示すには，

$$f(x) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int d^n k \, e^{ik\cdot x} \tilde{f}(-k) \tag{46}$$

$$g(x) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int d^n p \, e^{ip\cdot x} \tilde{g}(-p) \tag{47}$$

$$h(x) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int d^n q \, e^{iq\cdot x} \tilde{h}(-q) \tag{48}$$

として，

$$e^{ik\cdot x} \star (e^{ip\cdot x} \star e^{iq\cdot x}) = (e^{ik\cdot x} \star e^{ip\cdot x}) \star e^{iq\cdot x} \tag{49}$$

を示せばよい。

左辺は

$$e^{-\frac{i}{2}\theta^{ij}k_i(p+q)_j}e^{-\frac{i}{2}\theta^{ij}p_iq_j}e^{i(k+p+q)\cdot x} \tag{50}$$

右辺は

$$e^{-\frac{i}{2}\theta^{ij}(k+p)_iq_j}e^{-\frac{i}{2}\theta^{ij}k_ip_j}e^{i(k+p+q)\cdot x} \tag{51}$$

両者は一致。

$$e^{-\frac{i}{2}\theta^{ij}k_ip_j}e^{-\frac{i}{2}\theta^{ij}k_iq_j}e^{-\frac{i}{2}\theta^{ij}p_iq_j}e^{i(k+p+q)\cdot x} \tag{52}$$

前の subsection の最後の結果と合わせると

$$\int d^nx\,(f_1 \star f_2 \star \cdots f_n)(x) = \int d^nx\,(f_n \star f_1 \star \cdots f_{n-1})(x) \tag{53}$$

（って当たり前か。行列とトレースみたいなもんだねえ。）

6　非可換場の古典解

6.1　広がった「点」

２次元ユークリッド空間で次の方程式を考えよう。

$$f \star f(x) = f(x) \tag{54}$$

ただし，

$$\left[x^1, x^2\right]_\star = i\theta \qquad (\theta > 0) \tag{55}$$

とする。(42) から

$$\begin{aligned} \widetilde{f \star f}(k) &= \frac{1}{2\pi}\int dk_1' dk_2' e^{\frac{i}{2}\theta(k_1 k_2' - k_2 k_1')} \tilde{f}\left(\frac{1}{2}k + k'\right) \tilde{f}\left(\frac{1}{2}k - k'\right) \\ &= \tilde{f}(k) \end{aligned} \tag{56}$$

$\tilde{f}$ として，ガウシアンを仮定してみよう。

$$\tilde{f}(k) = A\, e^{-\alpha k^2} \tag{57}$$

このとき (56) は以下のようになり，

$$A\, e^{-\alpha k^2} = \frac{A^2}{2\pi}\int dk_1' dk_2'\, e^{\frac{i}{2}\theta(k_1 k_2' - k_2 k_1')} \exp\left(-\frac{\alpha}{2}k^2 - 2\alpha k'^2\right), \tag{58}$$

このガウス積分を実行すると

$$A\, e^{-\alpha k^2} = \frac{A^2}{2\pi}\frac{\pi}{2\alpha}\exp\left(-\frac{\alpha}{2}k^2 - \frac{\theta^2}{32\alpha}k^2\right) \tag{59}$$

となるので

$$\tilde{f}(k) = \theta\, e^{-\frac{\theta}{4}k^2} \tag{60}$$

が (56) の解。したがって (54) の最も単純な解として

$$f(x) = 2\, e^{-\frac{r^2}{\theta}} \tag{61}$$

を得た。ただし，$r^2 = (x^1)^2 + (x^2)^2$。

チェックとして，(54) から求まる

$$\int d^2x\, [f(x)]^2 = \int d^2x\, f(x) \tag{62}$$

は容易に確かめられる。[5]

ここで求めた解は，θ のオーダーの拡がりをもつことに注意しよう。

[5] 今の解の場合，この値は $2\pi\theta$。

6.2 フォック空間の基底による表示

以前にみた，フォック空間におけるオペレータによる表示[6] との関連を考えてみる。その場合，座標は交換しない「数」であるから，量子力学におけるオペレーターオーダリングの様な微妙さがある。

以下のようなフーリエ逆変換

$$f(x) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int d^n k \, \tilde{f}(k) \, e^{-ik\cdot x} \tag{63}$$

において，x を非可換な座標としたものが，可換なものに対応すると決めよう。[7]

前の subsection で求めた解については,

$$f(x_1, x_2) = \frac{\theta}{2\pi} \int d^2 k \, e^{-\frac{\theta}{4}k^2} \, e^{-ik_1 x^1 - ik_2 x^2} \tag{64}$$

すなわち

$$f(z, \bar{z}) = \frac{\theta}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\infty} dk \, k \, e^{-\frac{\theta}{4}k^2} \, \exp\left[-i\frac{k}{2} \left(\bar{z}\, e^{i\varphi} + z\, e^{-i\varphi} \right) \right] \tag{65}$$

である。ただしここで $k_1 = k\cos\varphi$，$k_2 = k\sin\varphi$ とした。

BCH 公式から

$$\begin{aligned} & \exp\left[-i\frac{k}{2} \left(\bar{z}\, e^{i\varphi} + z\, e^{-i\varphi} \right) \right] \\ = \; & \exp\left(-\frac{k^2}{4}\theta \right) \exp\left(-i\frac{k}{2}\bar{z}\, e^{i\varphi} \right) \exp\left(-i\frac{k}{2} z\, e^{-i\varphi} \right) \end{aligned} \tag{66}$$

おのおのの exponential を展開して，φ についての積分を行うと[8]

$$f(z, \bar{z}) = \theta \int_0^{\infty} dk \; k \; e^{-\frac{\theta}{2}k^2} \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{(-1)^\ell}{\ell!\ell!} \left(\frac{k}{2} \right)^{2\ell} \bar{z}^\ell z^\ell \tag{67}$$

となって，最後に k 積分を行うと（$\Gamma(\ell+1) = \ell!$）

$$f(z, \bar{z}) = \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{(-1)^\ell}{\ell!} \frac{\bar{z}^\ell z^\ell}{(2\theta)^\ell} \tag{68}$$

---

[6] オペレータ表示，演算子表示とも言う。

[7] Weyl 変換

[8] $\int_0^{2\pi} d\varphi \, e^{i(\ell - m)\varphi} = 2\pi\delta_{\ell m}$

となることがわかる。これは以前にやった表示で

$$: e^{-a^\dagger a} := |0\rangle\langle 0| \tag{69}$$

のことである。

$$|0\rangle\langle 0|0\rangle\langle 0| = |0\rangle\langle 0| \tag{70}$$

であるので，(54) の解になっていることは明らかである。

非可換座標でかかれたものから，逆変換も一意的に決まることが知られている。ここでは割愛する。

ついでながら，こちらの表示では「体積積分」にあたるものとして Tr を導入し，

$$\mathrm{Tr}\, e^{-ik\cdot x} = (2\pi)^n \delta^n(k) \tag{71}$$

を満たすとしなければならない。これは (63) と通常の座標表示のものを比べればわかる。

$$\mathrm{Tr}\, f\, g = \mathrm{Tr}\, g\, f \tag{72}$$

を満たす。

先ほどの 2 次元の例では

$$\mathrm{Tr}\, f(x) = 2\pi \tilde{f}(0) \tag{73}$$

だから

$$|0\rangle\langle 0| = \frac{\theta}{2\pi}\int d^2k\, e^{-\frac{\theta}{4}k^2}\ e^{-ik_1x^1 - ik_2x^2} \tag{74}$$

より

$$\mathrm{Tr}\, |0\rangle\langle 0| = 2\pi\theta \tag{75}$$

では，Tr $|1\rangle\langle 1|$ は何か？

$$\begin{aligned}
|1\rangle\langle 1| &= \frac{\theta}{2\pi}\int d^2k\, e^{-\theta k\bar{k}}\ \frac{\bar{z}}{\sqrt{2\theta}} e^{-i\bar{k}\bar{z} - ikz} \frac{z}{\sqrt{2\theta}} \\
&= \frac{\theta}{2\pi}\int d^2k\, e^{-2\theta k\bar{k}}\ \frac{1}{2\theta}\bar{z} e^{-i\bar{k}\bar{z}} e^{-ikz} z \\
&= \frac{\theta}{2\pi}\int d^2k\, e^{-2\theta k\bar{k}}\ \frac{-1}{2\theta}\frac{\partial}{\partial\bar{k}}\frac{\partial}{\partial k}\left(e^{-i\bar{k}\bar{z}} e^{-ikz}\right) \\
&= \frac{\theta}{2\pi}\int d^2k\, e^{-2\theta k\bar{k}}\ \frac{-4\theta^2 k\bar{k} + 2\theta}{2\theta} e^{-i\bar{k}\bar{z}} e^{-ikz}
\end{aligned} \tag{76}$$

（$k=(k_1-ik_2)/2, \bar{k}=(k_1+ik_2)/2$ である。）であるから

$$\mathrm{Tr}\,|1\rangle\langle 1| = 2\pi\theta \tag{77}$$

同様に

$$\mathrm{Tr}\,|m\rangle\langle m| = 2\pi\theta \tag{78}$$

　ということは,

$$\mathrm{Tr}\ = 2\pi\theta\,\mathrm{Tr}_H \tag{79}$$

ここで

$$\mathrm{Tr}_H\, f = \sum_{n=0}^{\infty} \langle n|f|n\rangle \tag{80}$$

6.3　非可換ソリトン解

　スカラー場 ϕ の action

$$\int d^2x \left[\frac{1}{2}\partial_i\phi \star \partial_i\phi + V(\phi)_\star\right] \tag{81}$$

を考える。$V(\phi)_\star$ はスター積で書かれていることを表す。再び

$$\left[x^1, x^2\right]_\star = i\theta \qquad (\theta > 0) \tag{82}$$

とする。

　$x^i \to x^i\sqrt{\theta}$ と変換すると action は

$$\int d^2x \left[\frac{1}{2}\partial_i\phi \star \partial_i\phi + \theta V(\phi)_\star\right] \tag{83}$$

ただし

$$\left[x^1, x^2\right]_\star = i \tag{84}$$

　θ が大きいときは，kinetic term は無視できる。[9] したがって

$$\frac{\partial V(\phi)_\star}{\partial\phi} = 0 \tag{85}$$

が θ が大きい場合の方程式。

[9] ソリトンみたいな穏やかなものがあるとして

さて，ポテンシャルが「自発的対称性の破れ」のタイプ $\cdots$ すなわち $\phi = 0$ が極大，$\phi = v$ が極小の場合，

$$\phi \star (\phi - v) \star U(\phi)_\star = 0 \tag{86}$$

のような運動方程式になる。U は何らかの関数。

この運動方程式の解は，上で見た $f \star f = f$ の解 f を用いて

$$\phi_0(x) = v\, f(x) \tag{87}$$

と書ける。なぜならば

$$\phi_0 \star (\phi_0 - v) = v\, f \star (v\, f - v) = v^2\ (f \star f - f) = 0 \tag{88}$$

7 非可換空間上のゲージ理論

7.1 field strength

通常の場合。

$$\begin{aligned} F_{ij} &= \partial_i A_j - \partial_j A_i + i\left[A_i, A_j\right] \\ &= -i\left[D_i, D_j\right] \end{aligned} \tag{89}$$

ただし $D_i \equiv \partial_i + iA_i$。

非可換空間では，(89) の一行目のように

$$F_{ij}^{(\star)} = \partial_i A_j - \partial_j A_i + i\left[A_i, A_j\right]_\star \tag{90}$$

とすればよろしいでしょう。$U(1)$ でも最後の項が残ることに注意。

$U(1)$ ゲージ変換は

$$\delta A_i = \partial_i \lambda + i\left[A_i, \lambda\right]_\star \tag{91}$$

この変換で

$$\delta F_{ij}^{(\star)} = i\left[F_{ij}^{(\star)}, \lambda\right]_\star \tag{92}$$

したがって

$$\int d^n x F_{ij}^{(\star)} \star F_{ij}^{(\star)} \tag{93}$$

はゲージ変換の下で不変。
$F_{ij}^{(\star)} \star F_{ij}^{(\star)}$ はゲージ不変ではない！

Nonabelian のときは？

(89) の二行目の書き方をするには，もともとこの導出は後ろに何かぶっかかってるのをおもいだせば，

$$D_i \to C_i \equiv \hat{\partial}_i + iA_i = -i(\theta^{-1})_{ij} x^j + iA_i \tag{94}$$

をつかって書くべき。ただ前に見たように微分演算子が可換でないので

$$F_{ij} = -i\left[C_i, C_j\right] - (\theta^{-1})_{ij} \tag{95}$$

7.2 vortex solution

可換空間では，スカラー場のあるときに特異性のない解がつくられる。非可換時空の非局所性のため，スカラーなしでも，特異性のない解が期待できる。

２次元[10] 非可換座標で

$$\left[x^1, x^2\right] = i\theta \qquad (\theta > 0) \tag{96}$$

を満たすとする。

$$C_1 = \frac{i}{\theta}x^2 + iA_1, \qquad C_2 = -\frac{i}{\theta}x^1 + iA_2 \tag{97}$$

を組み合わせ

$$C = \frac{1}{2}(C_1 - iC_2) = -\frac{1}{2\theta}\bar{z} + iA, \qquad \bar{C} = \frac{1}{2}(C_1 + iC_2) = \frac{1}{2\theta}z + i\bar{A} \tag{98}$$

をつくる。ここで

$$A = \frac{1}{2}(A_1 - iA_2), \qquad \bar{A} = \frac{1}{2}(A_1 + iA_2) \tag{99}$$

これを用いて

$$F = F_{12} = -2\left[C, \bar{C}\right] + \frac{1}{\theta} \tag{100}$$

action は

$$\mathrm{Tr}\, F^2 \tag{101}$$

運動方程式は

$$\left[C, \left[C, \bar{C}\right]\right] = 0 \tag{102}$$

もちろん真空

$$C = -\frac{1}{2\theta}\bar{z}, \qquad \bar{C} = \frac{1}{2\theta}z \tag{103}$$

は運動方程式の解である。（このとき $F = 0$）

またそのゲージ変換

$$C = -\frac{1}{2\theta}U^\dagger \bar{z} U, \qquad \bar{C} = \frac{1}{2\theta}U^\dagger z U \tag{104}$$

[10] エネルギーとか議論するときは $(2+1)$ 次元にする。

も解である。

$UU^\dagger = 1$ でなくてはならないが，$U^\dagger U = 1$ である必要はない。[11]

この性質を満たす最も単純なものは $S^\dagger$ と S で

$$S^\dagger = \sum_{n=0}^{\infty} |n+1\rangle\langle n|, \qquad S = \sum_{n=0}^{\infty} |n\rangle\langle n+1| \tag{105}$$

これらは $SS^\dagger = 1$ を満たすが[12]

$$S^\dagger S = 1 - |0\rangle\langle 0| \tag{106}$$

$U = S^m$ などととれば

$$\theta F = 1 - (S^\dagger)^m S^m = \sum_{n=0}^{m-1} |n\rangle\langle n| \tag{107}$$

total flux は

$$\theta \,\mathrm{Tr}\, F = 2\pi\theta m \tag{108}$$

全エネルギー＝質量[13] も整数 m に比例。

$$\mathrm{Tr}\, F^2 = \frac{2\pi m}{\theta} \tag{109}$$

通常の空間上で，巻き数を変える変換が作れないわけは，原点で特異性を持つためです。[14] 非可換空間では非局在性のため，nonsingular な変換が作れる。

[11] たとえば，$U^\dagger C U U^\dagger \bar{C} U = U^\dagger C \bar{C} U$，$\mathrm{Tr}\, U^\dagger F^2 U = \mathrm{Tr}\, F^2 U U^\dagger = \mathrm{Tr}\, F^2$

[12] $1 = \sum_{n=0}^{\infty} |n\rangle\langle n|$

[13] $(2+1)$ 次元で議論すべきですが $\cdots$

[14] $U = e^{im\varphi}$ のように。

8　非可換空間上の量子場の理論

４次元 Euclidean スカラー場の理論を考える。

8.1　相互作用のない理論

action を以下のようにする。

$$S = \int d^4x \left(\frac{1}{2} \partial_i \phi \star \partial_i \phi + \frac{1}{2} m^2 \phi \star \phi \right) \tag{110}$$

運動量空間で考えよう。

$$\phi(x) = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} e^{ik\cdot x} \tilde{\phi}(k) \tag{111}$$

$$e^{ik\cdot x} \star e^{ik'\cdot x} = e^{-\frac{i}{2}\theta^{ij} k_i k'_j} e^{i(k+k')\cdot x} \equiv e^{-\frac{i}{2} k \times k'} e^{i(k+k')\cdot x} \tag{112}$$

なので action は

$$\begin{aligned} & \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{2} \tilde{\phi}(-k) e^{\frac{i}{2} k\times k} (k^2 + m^2) \tilde{\phi}(k) \\ = & \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{2} \tilde{\phi}(-k) (k^2 + m^2) \tilde{\phi}(k) \end{aligned} \tag{113}$$

$k \times k = 0$ なので，プロパゲーターは変わらない。

$$\frac{1}{k^2 + m^2} \tag{114}$$

8.2　ϕ^3 理論

action を以下のようにする。

$$S = \int d^4x \left(\frac{1}{2} \partial_i \phi \star \partial_i \phi + \frac{1}{2} m^2 \phi \star \phi + \frac{g}{6} \phi \star \phi \star \phi \right) \tag{115}$$

相互作用項は

$$\begin{aligned} & e^{ik_1\cdot x} \star e^{ik_2\cdot x} \star e^{ik_3\cdot x} \\ = & e^{-\frac{i}{2} k_2 \times k_3} e^{ik_1\cdot x} \star e^{i(k_2+k_3)\cdot x} \\ = & e^{-\frac{i}{2} k_2 \times k_3} e^{-\frac{i}{2} k_1 \times (k_2+k_3)} e^{i(k_1+k_2+k_3)\cdot x} \end{aligned} \tag{116}$$

によってバーテックス

$$\propto e^{-\frac{i}{2}k_1\times k_2}\delta^4(k_1+k_2+k_3) \tag{117}$$

を導く。

ϕ^n 理論ではバーテックスに

$$\exp -\frac{i}{2}\sum_{1\le a<b<n} k_a\times k_b \tag{118}$$

の因子が現れる。（k はすべてバーテックスに入っていく方向。）

cyclic symmetry [15] はあるが，permutation symmetry は無い。

8.3 ϕ^4 理論

action を以下のようにする。

$$S=\int d^4x\left(\frac{1}{2}\partial_i\phi\star\partial_i\phi+\frac{1}{2}m^2\phi\star\phi+\frac{\lambda}{4!}\phi\star\phi\star\phi\star\phi\right) \tag{119}$$

ϕ^4 理論ではバーテックスに

$$\exp\left[-\frac{i}{2}(k_1\times k_2+k_1\times k_3+k_2\times k_3)\right] \tag{120}$$

の因子が現れる。

one-loop self-energy diagram を考える。

入ってくる運動量を p，ループを k が回るとする。

$k_1=p$ と選ぶ。[16]

$-p$ の選び方に以下の３通り。

・$k_2=-p$ と選ぶ。このとき因子は

$$\exp\left[-\frac{i}{2}(p\times(-p)+p\times k+(-p)\times k)\right]=1 \tag{121}$$

[15] (53) からわかる。
[16] ４通り。

・$k_4 = -p$ と選ぶ。このとき因子は

$$\exp\left[-\frac{i}{2}(p\times k + p\times(-k) + k\times(-k))\right] = 1 \tag{122}$$

・$k_3 = -p$ と選ぶ。このとき因子は

$$\exp\left[-\frac{i}{2}(p\times k + p\times(-p) + k\times(-p))\right] = \exp\left[-i(p\times k)\right] \tag{123}$$

したがって

$$\Gamma_1^{(2)} = \Gamma^{(2)}_{1\ planer} + \Gamma^{(2)}_{1\ nonplaner} \tag{124}$$

$$\Gamma^{(2)}_{1\ planer} = \frac{-\lambda}{3(2\pi)^4}\int\frac{d^4k}{k^2+m^2} \tag{125}$$

$$\Gamma^{(2)}_{1\ nonplaner} = \frac{-\lambda}{6(2\pi)^4}\int\frac{d^4k}{k^2+m^2}e^{ik\times p} \tag{126}$$

これらを regularize する。Schwinger parameter を用いて

$$\begin{aligned}\Gamma^{(2)}_{1\ planer} &= \frac{-\lambda}{3(2\pi)^4}\int_0^\infty dt\int d^4k e^{-t(k^2+m^2)} \\ &= \frac{-\lambda}{3(4\pi)^2}\int_0^\infty \frac{dt}{t^2}e^{-tm^2}\end{aligned} \tag{127}$$

regularize のため $e^{-\frac{1}{4\Lambda^2 t}}$ を導入すると（Λ はカットオフ）

$$\begin{aligned}\Gamma^{(2)}_{1\ planer} &= \frac{-\lambda}{3(4\pi)^2}\int_0^\infty \frac{dt}{t^2}e^{-tm^2-\frac{1}{4\Lambda^2 t}} \\ &= \frac{-\lambda}{3(4\pi)^2}4m\Lambda K_1\left(\frac{m}{\Lambda}\right)\end{aligned} \tag{128}$$

これは普通の発散の regularization。

同様に

$$\begin{aligned}\Gamma^{(2)}_{1\ nonplaner} &= \frac{-\lambda}{6(2\pi)^4}\int_0^\infty dt\int d^4k e^{-t(k^2+m^2)+ik\times p} \\ &= \frac{-\lambda}{6(4\pi)^2}\int_0^\infty \frac{dt}{t^2}e^{-tm^2-\frac{p\circ p}{4t}}\end{aligned} \tag{129}$$

ここで $p \circ p = p_i \theta^{ik} \theta^{jk} p_j$。

regularize のため $e^{-\frac{1}{4\Lambda^2 t}}$ を導入すると

$$\begin{aligned} \Gamma^{(2)}_{1\ nonplaner} &= \frac{-\lambda}{6(4\pi)^2} \int_0^\infty \frac{dt}{t^2} e^{-tm^2 - \frac{1}{4\Lambda_{eff}^2 t}} \\ &= \frac{-\lambda}{6(4\pi)^2} 4m\Lambda_{eff} K_1 \left(\frac{m}{\Lambda_{eff}} \right) \end{aligned} \tag{130}$$

ここで $\Lambda_{eff}^{-2} = p \circ p + \Lambda^{-2}$。

nonplaner では $\Lambda^2 \to \infty$ でも Λ_{eff}^2 は有限 !! $\approx 1/p \circ p$

これが発散するのは $p \approx 0$ のとき。おお，IR?
UV と IR の発散が混在している ?!

参考文献

[1] I. Ya. Aref'eva, D. M. Belov, A. A. Giryavets, A. S. Koshelev and P. B. Medvedev, "Noncommutative Field Theories and (Super) String Field Theories", `hep-th/0111208`.

[2] N. G. Deshpande, "A review of non-commutative gauge theories", Pramana **60** (2003) 189.

[3] M. R. Douglas and N. A. Nekrasov, "Noncommutative Field Theory", Review of Modern Physics **73** (2001) 977. (`hep-th/0106048`).

[4] M. Gomes, "Noncommutative Field Theories", Braz. J. Phys. 32 (2002) 838-842.

[5] F. Hofheinz, "Field theory on a non-commutative plane: a non-perturbative study", Fortschr. Phys. **52** (2004) 391.

[6] A. Konechny and A. Schwarz, Phys. Rep. **360** (2002) 353 `hep-th/0012145`.

[7] Kh. Namsrai, "Noncommutative Field Theory", Int. J. Theor. Phys. **42** (2003) 2609.

[8] M. Olsson, "Noncommutative Scalar Field Theory and the UV/IR Mixing", Master's degree project (2002).

[9] V. O. Rivelles, "Supersymmetry and Gravity in Noncommutative Field Theories", Nucl. Phys. B (Proc. Suppl.) 127 (2004) 63-70.

[10] V. O. Rivelles, "Noncommutative Supersymmetric Field Theories", Braz. J. Phys. 31 (2001) 255-262.

[11] F. A. Schaposnik, hep-th/0408132.

[12] M. M. Sheikh-Jabbari, "Noncommutative string and field theories, a review of the status", Nucl. Phys. B (Proc. Suppl.) 108 (2002) 113.

[13] R. J. Szabo, "Quantum Field Theory on Noncommutative Spaces", Phys. Rep. **378** (2003) 30 `hep-th/0109162`.

[14] R. J. Szabo, “Magnetic Backgrounds and Noncommutative Field Theory”, physics/0401142.

[15] J. Zahn, “Wirkungs- und Lokalitätsprinzip für nichtkommutative skalare Feldtheorien”, Diplomarbeit, Universität Hamburg, 2003.

[16] 浜中真志　「非可換ゲージ理論におけるソリトン解」, http://www.math.h.kyoto-u.ac.jp/~takasaki/soliton-lab/nis/iss2001/

[17] 松尾泰　“Geomertrical Aspects of Noncommutative Soliton”, http://hep-th.phys.s.u-tokyo.ac.jp/~matsuo/paper/yitp2001.ps.gz