電磁気学（extra）

白石　清（山口大学理学部）

1999 年 06 月 24 日改訂

概　要

目 次

1　運動する荷電粒子のつくる電磁場

1.1　Liénard-Wiechert potential

まず，時間に依存する（ゲージ）ポテンシャルの解は，

$$\phi(\mathbf{r},t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_V \frac{\rho(\mathbf{r}',t-R/c)}{R}d^3\mathbf{r}' \tag{1}$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{r},t) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_V \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}',t-R/c)}{R}d^3\mathbf{r}' \tag{2}$$

ここで $R \equiv |\mathbf{r}-\mathbf{r}'|$ である。

さて，まず原点に荷電粒子 q があるとしよう。その速度ベクトルを $\mathbf{v}$ とする。

観測点 $\mathbf{r}=\mathbf{R}$ では，もし荷電粒子が止まっていれば

$$\phi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{r} \tag{3}$$

となる。電荷が動いているとすると，その影響が伝わるのに r/c の時間がかかる。その間に，電荷と観測点の距離はだいたい

$$r - \frac{\mathbf{r}\cdot\mathbf{v}}{c} \tag{4}$$

となるであろう。したがって

$$\phi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{r}\frac{q}{1-\frac{\mathbf{r}\cdot\mathbf{v}}{rc}} \tag{5}$$

となることが期待される。同様に

$$\mathbf{A} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{1}{r}\frac{q\mathbf{v}}{1-\frac{\mathbf{r}\cdot\mathbf{v}}{rc}} \tag{6}$$

となることが期待される。

もっと完全な形は，Liénard-Wiechert potential とよばれ，次のようになる。

$$\phi(\mathbf{r},t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{R}\frac{q}{1-\frac{\mathbf{R}\cdot\mathbf{v}}{Rc}} \tag{7}$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{r},t) = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{1}{R}\frac{q\mathbf{v}}{1-\frac{\mathbf{R}\cdot\mathbf{v}}{Rc}} \tag{8}$$

ここで荷電粒子 q は $\mathbf{r}'(t')$ の位置にあり，

$$\mathbf{v}(t') = \frac{d}{dt'}\mathbf{r}'(t') \tag{9}$$

$$\mathbf{R} = \mathbf{r} - \mathbf{r}'(t') \tag{10}$$

$$t' = t - \frac{R}{c} \tag{11}$$

である。

1.2　電場と磁場

1.2.1　準備：2つの「時間」のある場合の「微分」(1)

まず，時間座標の偏微分は

$$\frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial t'}{\partial t}\frac{\partial}{\partial t'} \tag{12}$$

として扱えばよい。

気をつけるのは，空間座標の微分。
一般に，次のように考える。

$$\begin{aligned} \nabla f &= \nabla^* f + (\nabla t')\frac{\partial f}{\partial t'} && (13) \\ \nabla \times \mathbf{V} &= \nabla^* \times \mathbf{V} + (\nabla t') \times \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t'} && (14) \end{aligned}$$

ここで ∇^* は，t' を一定としたときの，空間座標の微分を表す。

1.2.2　準備：$\frac{\partial t'}{\partial t}$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\frac{\partial R^2}{\partial t} &= R\frac{\partial R}{\partial t} \\ &= \mathbf{R} \cdot \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial t} \\ &= \mathbf{R} \cdot \frac{\partial(\mathbf{r} - \mathbf{r}'(t'))}{\partial t} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= -\mathbf{R}\cdot\left(\frac{\partial t'}{\partial t}\frac{\partial \mathbf{r}'(t')}{\partial t'}\right)\\
&= -\mathbf{R}\cdot\mathbf{v}\frac{\partial t'}{\partial t} \qquad (15)
\end{aligned}
$$

一方，

$$
R = c(t - t') \qquad (16)
$$

より，

$$
\frac{\partial R}{\partial t} = c\left(1 - \frac{\partial t'}{\partial t}\right) \qquad (17)
$$

したがって，

$$
\frac{\partial t'}{\partial t} = \frac{R}{R - \frac{\mathbf{R}\cdot\mathbf{v}}{c}} = \frac{1}{1 - \frac{\mathbf{R}\cdot\mathbf{v}}{Rc}} \qquad (18)
$$

1.2.3　準備：$\nabla t'$

同様に

$$
\begin{aligned}
R\frac{\partial R}{\partial x} &= \mathbf{R}\cdot\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial x}\\
&= (x - x') - \mathbf{R}\cdot\mathbf{v}\frac{\partial t}{\partial x} \qquad (19)
\end{aligned}
$$

一方

$$
R = c(t - t') \qquad (20)
$$

より，

$$
\frac{\partial R}{\partial x} = -c\frac{\partial t'}{\partial x} \qquad (21)
$$

したがって

$$
\frac{\partial t'}{\partial x} = -\frac{x - x'}{c\left(R - \frac{\mathbf{R}\cdot\mathbf{v}}{c}\right)} \qquad (22)
$$

すなわち

$$
\nabla t' = -\frac{\mathbf{R}}{c\left(R - \frac{\mathbf{R}\cdot\mathbf{v}}{c}\right)} \qquad (23)
$$

1.2.4 準備：２つの「時間」のある場合の「微分」(2)

以上より，

$$\frac{\partial}{\partial t} = \frac{R}{R - \frac{\mathbf{R}\cdot\mathbf{v}}{c}} \frac{\partial}{\partial t'} \tag{24}$$

$$\nabla f = \nabla^* f - \frac{\mathbf{R}}{c\left(R - \frac{\mathbf{R}\cdot\mathbf{v}}{c}\right)} \frac{\partial f}{\partial t'} \tag{25}$$

$$\nabla \times \mathbf{V} = \nabla^* \times \mathbf{V} - \frac{\mathbf{R}}{c\left(R - \frac{\mathbf{R}\cdot\mathbf{v}}{c}\right)} \times \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t'} \tag{26}$$

ここで ∇^* は，t' を一定としたときの，空間座標の微分を表す。

$$s \equiv R - \frac{\mathbf{R}\cdot\mathbf{v}}{c} \tag{27}$$

を定義すると，

$$\frac{\partial}{\partial t} = \frac{R}{s} \frac{\partial}{\partial t'} \tag{28}$$

$$\nabla f = \nabla^* f - \frac{\mathbf{R}}{cs} \frac{\partial f}{\partial t'} \tag{29}$$

$$\nabla \times \mathbf{V} = \nabla^* \times \mathbf{V} - \frac{\mathbf{R}}{cs} \times \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t'} \tag{30}$$

と書ける。

<u>ex.</u>

$$\nabla^* s = \frac{\mathbf{R}}{R} - \frac{\mathbf{v}}{c} \tag{31}$$

$$\frac{\partial s}{\partial t'} = -\frac{\mathbf{R}\cdot\mathbf{v}}{R} + \frac{\mathbf{v}^2}{c} - \frac{\mathbf{R}}{c} \cdot \frac{d\mathbf{v}}{dt'} \tag{32}$$

1.2.5 電場

Liénard-Wiechert potentialは

$$\phi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{s} \tag{33}$$

$$\mathbf{A} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{q\mathbf{v}}{s} \tag{34}$$

と書けるので，

$$\begin{aligned}
\mathbf{E} &= -\nabla\phi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \\
&= \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{s^2}\nabla s + \frac{\mu_0 q}{4\pi}\left(\frac{\mathbf{v}}{s^2}\frac{\partial s}{\partial t} - \frac{1}{s}\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t}\right) \\
&= \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{1}{s^2}\nabla s + \frac{1}{c^2}\frac{\mathbf{v}}{s^2}\frac{\partial s}{\partial t} - \frac{1}{c^2}\frac{1}{s}\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t}\right) \\
&= \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{1}{s^2}\nabla^* s - \frac{\mathbf{R}}{cs^3}\frac{\partial s}{\partial t'} + \frac{R\mathbf{v}}{c^2 s^3}\frac{\partial s}{\partial t'} - \frac{R}{c^2 s^2}\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t'}\right)
\end{aligned} \tag{35}$$

よって

$$\begin{aligned}
\mathbf{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \quad & \left[\frac{1}{s^2}\left(\frac{\mathbf{R}}{R} - \frac{\mathbf{v}}{c}\right)\right. \\
& -\frac{1}{cs^3}\left(\mathbf{R} - R\frac{\mathbf{v}}{c}\right)\left(-\frac{\mathbf{R}\cdot\mathbf{v}}{R} + \frac{\mathbf{v}^2}{c} - \frac{\mathbf{R}}{c}\cdot\frac{d\mathbf{v}}{dt'}\right) \\
& \left. - \frac{R}{c^2 s^2}\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t'}\right]
\end{aligned} \tag{36}$$

と書ける。

この形を書き直してみる。（あとの磁場との比較が容易になる。）

まずまとめなおして

$$\begin{aligned}
\mathbf{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \quad & \left[\frac{1}{s^2 R}\left(\mathbf{R} - R\frac{\mathbf{v}}{c}\right)\right. \\
& + \left(\mathbf{R} - R\frac{\mathbf{v}}{c}\right)\left(-\frac{\mathbf{v}^2}{c^2 s^3} + \frac{\mathbf{R}\cdot\mathbf{v}}{Rcs^3}\right) \\
& \left. + \left(\mathbf{R} - R\frac{\mathbf{v}}{c}\right)\frac{1}{c^2 s^3}\mathbf{R}\cdot\frac{d\mathbf{v}}{dt'} - \frac{R}{c^2 s^2}\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t'}\right]
\end{aligned} \tag{37}$$

次のものを計算してみる。

$$\begin{aligned}
&\mathbf{R}\times\left[\left(\mathbf{R}-R\frac{\mathbf{v}}{c}\right)\times\frac{d\mathbf{v}}{dt'}\right] \\
=\;& \mathbf{R}\cdot\frac{d\mathbf{v}}{dt'}\left(\mathbf{r}-R\frac{\mathbf{v}}{c}\right)-\left(R^2-R\frac{\mathbf{R}\cdot\mathbf{v}}{c}\right)\frac{d\mathbf{v}}{dt'} \\
=\;& \left(\mathbf{r}-R\frac{\mathbf{v}}{c}\right)\mathbf{R}\cdot\frac{d\mathbf{v}}{dt'}-R\left(R-\frac{\mathbf{R}\cdot\mathbf{v}}{c}\right)\frac{d\mathbf{v}}{dt'} \qquad (38)
\end{aligned}$$

これを用いると

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}=\frac{q}{4\pi\epsilon_0}\quad&\left\{\left(\mathbf{R}-R\frac{\mathbf{v}}{c}\right)\left(\frac{1}{s^2R}-\frac{\mathbf{v}^2}{c^2s^3}+\frac{\mathbf{R}\cdot\mathbf{v}}{Rcs^3}\right)\right. \\
&\left.+\frac{1}{c^2s^3}\mathbf{R}\times\left[\left(\mathbf{R}-R\frac{\mathbf{v}}{c}\right)\times\frac{d\mathbf{v}}{dt'}\right]\right\} \qquad (39)
\end{aligned}$$

最後に

$$\frac{\mathbf{R}\cdot\mathbf{v}}{Rcs^3}=\frac{R-s}{Rs^3}=\frac{1}{s^3}-\frac{1}{Rs^2} \qquad (40)$$

を用いると,

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}=\frac{q}{4\pi\epsilon_0}\quad&\left\{\frac{1}{s^3}\left(1-\frac{\mathbf{v}^2}{c^2}\right)\left(\mathbf{R}-R\frac{\mathbf{v}}{c}\right)\right. \\
&\left.+\frac{1}{c^2s^3}\mathbf{R}\times\left[\left(\mathbf{R}-R\frac{\mathbf{v}}{c}\right)\times\frac{d\mathbf{v}}{dt'}\right]\right\} \qquad (41)
\end{aligned}$$

1.2.6 磁場

$$\begin{aligned}
\mathbf{B} &= \nabla\times\mathbf{A} \\
&= \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{c^2}\nabla\times\frac{\mathbf{v}}{s} \\
&= \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{c^2}\left(\frac{\mathbf{v}}{s^2}\times\nabla s+\frac{1}{s}\nabla\times\mathbf{v}\right) \\
&= \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{c^2}\left(\frac{\mathbf{v}}{s^2}\times\nabla^* s-\frac{\mathbf{v}}{cs^3}\times\mathbf{R}\frac{\partial s}{\partial t'}-\frac{\mathbf{R}}{cs^2}\times\frac{d\mathbf{v}}{dt'}\right) \qquad (42)
\end{aligned}$$

したがって

$$\mathbf{B}=\frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{c^2}\quad\left[\frac{\mathbf{v}}{s^2}\times\left(\frac{\mathbf{R}}{R}-\frac{\mathbf{v}}{c}\right)\right.$$
$$-\frac{\mathbf{v}}{cs^3}\times\mathbf{R}\left(-\frac{\mathbf{R}\cdot\mathbf{v}}{R}+\frac{\mathbf{v}^2}{c}-\frac{\mathbf{R}}{c}\cdot\frac{d\mathbf{v}}{dt'}\right)$$
$$\left.-\frac{\mathbf{R}}{cs^2}\times\frac{d\mathbf{v}}{dt'}\right] \tag{43}$$

すなわち（ほとんど同じだが）

$$\mathbf{B}=\frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{c^2}\quad\left[\frac{\mathbf{v}}{s^2}\times\frac{\mathbf{R}}{R}\right.$$
$$-\frac{\mathbf{v}}{cs^3}\times\mathbf{R}\left(-\frac{\mathbf{R}\cdot\mathbf{v}}{R}+\frac{\mathbf{v}^2}{c}-\frac{\mathbf{R}}{c}\cdot\frac{d\mathbf{v}}{dt'}\right)$$
$$\left.-\frac{\mathbf{R}}{cs^2}\times\frac{d\mathbf{v}}{dt'}\right] \tag{44}$$

ここで止めておいて，(36) の式から

$$\frac{\mathbf{R}\times\mathbf{E}}{Rc} \tag{45}$$

を計算してみると，

$$\frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{Rc}\quad\left[-\frac{\mathbf{R}\times\mathbf{v}}{cs^2}\right.$$
$$+\frac{R}{c^2s^3}\mathbf{R}\times\mathbf{v}\left(-\frac{\mathbf{R}\cdot\mathbf{v}}{R}+\frac{\mathbf{v}^2}{c}-\frac{\mathbf{R}}{c}\cdot\frac{d\mathbf{v}}{dt'}\right)$$
$$\left.-\frac{R}{cs^2}\mathbf{R}\times\frac{d\mathbf{v}}{dt'}\right] \tag{46}$$

これは少し整理すれば，(44) と同じであることがわかる。

1.2.7 電磁場のまとめ

運動する荷電粒子のつくる電磁場は

$$\mathbf{E}=\frac{q}{4\pi\epsilon_0}\quad\left\{\frac{1}{s^3}\left(1-\frac{\mathbf{v}^2}{c^2}\right)\left(\mathbf{R}-R\frac{\mathbf{v}}{c}\right)\right.$$
$$\left.+\frac{1}{c^2s^3}\mathbf{R}\times\left[\left(\mathbf{R}-R\frac{\mathbf{v}}{c}\right)\times\frac{d\mathbf{v}}{dt'}\right]\right\} \tag{47}$$

（（一般には）遠方では第 2 項の方が効くことに注意。）

$$\mathbf{B} = \frac{\mathbf{R}\times\mathbf{E}}{Rc} \tag{48}$$

ただし

$$s = R - \frac{\mathbf{R}\cdot\mathbf{v}}{c} \tag{49}$$

1.3 ポインティングベクトル

1.3.1 遠方での輻射場の評価

$$\begin{aligned}\frac{1}{\mu_0}\mathbf{E}\times\mathbf{B} &= \frac{1}{\mu_0}\mathbf{E}\times\frac{\mathbf{R}\times\mathbf{E}}{Rc} \\ &= \underbrace{\frac{1}{\mu_0}|\mathbf{E}|^2\frac{\mathbf{R}}{Rc}}_{(1)} - \underbrace{\frac{1}{\mu_0}\frac{\mathbf{E}\cdot\mathbf{R}}{Rc}\mathbf{E}}_{(2)}\end{aligned} \tag{50}$$

$$\begin{aligned}(1) &= \frac{1}{\mu_0}\left(\frac{q}{4\pi\epsilon_0}\right)^2\frac{\mathbf{R}}{Rc}\left\{\frac{1}{s^6}\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^2\left(\mathbf{R}-R\frac{\mathbf{v}}{c}\right)^2\right. \\ &\quad -2\frac{1}{c^2s^6}\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)\frac{R\mathbf{v}}{c}\times\left(\mathbf{R}\times\left[\left(\mathbf{R}-\frac{R\mathbf{v}}{c}\right)\times\frac{d\mathbf{v}}{dt'}\right]\right) \\ &\quad \left.+\frac{1}{c^4s^6}\left|\mathbf{R}\times\left[\left(\mathbf{R}-\frac{R\mathbf{v}}{c}\right)\times\frac{d\mathbf{v}}{dt'}\right]\right|^2\right\}\end{aligned} \tag{51}$$

十分遠方では

$$\begin{aligned}(1) &= \frac{1}{\mu_0}\left(\frac{q}{4\pi\epsilon_0}\right)^2\frac{\mathbf{R}}{Rc}\frac{1}{c^4s^6}\left|\mathbf{R}\times\left[\left(\mathbf{R}-\frac{R\mathbf{v}}{c}\right)\times\frac{d\mathbf{v}}{dt'}\right]\right|^2 \\ &= O(R^4/s^6)\approx O(1/R^2)\end{aligned} \tag{52}$$

$$\begin{aligned}(2) &= \frac{1}{\mu_0}\frac{q}{4\pi\epsilon_0}\mathbf{E}\frac{1}{Rc}\frac{1}{s^3}\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)\left(R^2-R\frac{\mathbf{R}\cdot\mathbf{v}}{c}\right) \\ &= \frac{1}{\mu_0}\frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{c}\frac{1}{s^2}\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)\mathbf{E}\end{aligned} \tag{53}$$

十分遠方では，$\mathbf{E} = O(R^2/s^3)$ なので

$$(2) = O(R^2/s^5) \approx O(1/R^3) \tag{54}$$

結局，十分遠方では

$$\mathbf{S} \approx \frac{q^2}{16\pi^2\epsilon_0 c^3}\frac{1}{s^6}\left|\mathbf{R} \times \left[\left(\mathbf{R} - \frac{R\mathbf{v}}{c}\right) \times \frac{d\mathbf{v}}{dt'}\right]\right|^2 \frac{\mathbf{R}}{R} \tag{55}$$

1.3.2 速度の遅い場合の発生電力

$$\frac{v}{c} << 1 \tag{56}$$

$$\mathbf{S} \approx \frac{q^2}{16\pi^2\epsilon_0 c^3}\frac{1}{R^6}\left|\mathbf{R} \times \left(\mathbf{R} \times \frac{d\mathbf{v}}{dt'}\right)\right|^2 \frac{\mathbf{R}}{R} \tag{57}$$

ここで

$$\mathbf{R} \times \left(\mathbf{R} \times \frac{d\mathbf{v}}{dt'}\right) = \left(\mathbf{R} \cdot \frac{d\mathbf{v}}{dt'}\right)\mathbf{R} - R^2\frac{d\mathbf{v}}{dt'} \tag{58}$$

を使うと

$$\begin{aligned}\mathbf{S} &\approx \frac{q^2}{16\pi^2\epsilon_0 c^3}\frac{1}{R^6}\left[\left(\mathbf{R} \cdot \frac{d\mathbf{v}}{dt'}\right)^2 R^2 - 2\left(\mathbf{R} \cdot \frac{d\mathbf{v}}{dt'}\right)^2 R^2 + R^4\left(\frac{d\mathbf{v}}{dt'}\right)^2\right]\frac{\mathbf{R}}{R} \\ &= \frac{q^2}{16\pi^2\epsilon_0 c^3}\frac{1}{R^2}\left[\left(\frac{d\mathbf{v}}{dt'}\right)^2 - \left(\frac{\mathbf{R}}{R} \cdot \frac{d\mathbf{v}}{dt'}\right)^2\right]\frac{\mathbf{R}}{R} \end{aligned} \tag{59}$$

これは，$\frac{d\mathbf{v}}{dt'}$ に垂直な方向に強い輻射があることを表す。

<u>輻射の電力</u>

$$\begin{aligned} W &= \int_{R\to\infty} d^2\Omega R^2 \frac{\mathbf{R}}{R} \cdot \mathbf{S} \\ &= \frac{q^2}{16\pi^2\epsilon_0 c^3}\int d^2\Omega\left(\delta^{ij} - n^i n^j\right)\dot{v}^i\dot{v}^j \end{aligned} \tag{60}$$

$$\int d^2\Omega = 4\pi, \quad \int d^2\Omega n^i n^j = \frac{4\pi}{3}\delta^{ij} \tag{61}$$

なので

$$W = \frac{q^2}{6\pi\epsilon_0 c^3}|\dot{v}|^2 \tag{62}$$

1.3.3　輻射の電力（一般の場合）

$$\mathbf{S} = \frac{1}{\mu_0}\mathbf{E}\times\mathbf{B} \tag{63}$$

$$\begin{aligned} \frac{dW}{d\Omega}d\Omega dt' &= S_R R^2 d\Omega dt \\ &= S_R R^2 \frac{dt}{dt'} d\Omega dt' \\ &= S_R R s d\Omega dt' \end{aligned} \tag{64}$$

ゆえに単位立体角当たりの輻射の電力は

$$\frac{dW}{d\Omega} = \frac{q^2}{16\pi^2\epsilon_0 c^3}\frac{R}{s^5}\left|\mathbf{R}\times\left[\left(\mathbf{R}-\frac{R\mathbf{v}}{c}\right)\times\frac{d\mathbf{v}}{dt'}\right]\right|^2 \tag{65}$$

したがって[1]

$$W = \frac{q^2}{6\pi\epsilon_0 c^3}\frac{|\dot{\mathbf{v}}|^2 - \frac{|\mathbf{v}\times\dot{\mathbf{v}}|^2}{c^2}}{(1-\beta^2)^3} \tag{66}$$

2　さまざまな輻射

2.1　制動輻射

$\dot{\mathrm{v}}$ と v が平行な場合。

一般に，輻射場は十分遠方で

$$\mathbf{S} = \frac{q^2}{16\pi^2\epsilon_0 c^3}\frac{1}{s^6}\left|\mathbf{R}\times\left[\left(\mathbf{R}-\frac{R\mathbf{v}}{c}\right)\times\frac{d\mathbf{v}}{dt'}\right]\right|^2\frac{\mathbf{R}}{R} \tag{67}$$

を与える。今は，$\mathbf{v}\times\dot{\mathbf{v}} = 0$ なので

$$\mathbf{S} = \frac{q^2}{16\pi^2\epsilon_0 c^3}\frac{1}{s^6}\left|\mathbf{R}\times(\mathbf{R}\times\dot{\mathbf{v}})\right|^2\frac{\mathbf{R}}{R} \tag{68}$$

したがって

$$\begin{aligned} \frac{dW}{d\Omega} &= \frac{q^2}{16\pi^2\epsilon_0 c^3}\frac{R}{s^5}\left|\mathbf{R}\times(\mathbf{R}\times\dot{\mathbf{v}})\right|^2 \\ &= \frac{q^2}{16\pi^2\epsilon_0 c^3}\frac{\sin^2\theta}{\left(1-\frac{v}{c}\cos\theta\right)^5}\dot{\mathbf{v}}^2 \end{aligned} \tag{69}$$

速度が大きいときは，前方に強い輻射。

[1] なんか本を読んで！

2.2 サイクロトロン輻射

$\dot{\mathbf{v}}$ と $\mathbf{v}$ が垂直な場合。
なおかつ，速度は比較的小さい場合。

速度は小さいので

$$\frac{dW}{d\Omega} = \frac{q^2}{16\pi^2\epsilon_0 c^3}\frac{1}{R^4}\left|\mathbf{R}\times(\mathbf{R}\times\dot{\mathbf{v}})\right|^2 \tag{70}$$

粒子は半径 a の円軌道を角速度 ω で等速運動しているとする。
$\dot{\mathbf{v}} = -\omega^2\mathbf{r}'$ である。
また，$r >> a$ のとき，$\mathbf{R} \approx \mathbf{r}$

$$|\mathbf{r}\times(\mathbf{r}\times\mathbf{r}')|^2 = a^2 r^4(1-\cos^2\Theta) \tag{71}$$

であることを使って,（Θ は $\mathbf{r}$ と $\mathbf{r}'$ のなす角）軌道運動の平均をとると，

$$\frac{dW}{d\Omega} = \frac{q^2 a^2\omega^4}{16\pi^2\epsilon_0 c^3}\frac{1+\cos^2\theta}{2} \tag{72}$$

ただし，θ は軌道面に垂直な方向から測った角度。

2.3 シンクロトロン輻射

$\dot{\mathbf{v}}$ と $\mathbf{v}$ が垂直な場合。
なおかつ，速度は比較的大きい場合。

3 4-vector および tensor による記述

3.1 gauge field and field strength

gauge field:

$$A_\mu = \left(-\frac{\phi}{c}, \mathbf{A}\right) = \left(-\frac{\phi}{c}, A_i\right) \tag{73}$$

field strength:

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu \tag{74}$$

ここで

$$\mu, \nu = 0, 1, 2, 3, \qquad i, j = 1, 2, 3 \tag{75}$$

$$x^0 = ct, \quad x^1 = x, \quad x^2 = y, \quad x^3 = z \tag{76}$$

$$\partial_\mu = \frac{\partial}{\partial x^\mu} \tag{77}$$

そして

$$A^0 = -A_0, \quad A^1 = A_1, \quad A^2 = A_2, \quad A^3 = A_3, \qquad etc. \tag{78}$$

$$\begin{aligned} F_{i0} &= \partial_i A_0 - \partial_0 A_i \\ &= \partial_i \left(-\frac{\phi}{c}\right) - \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t} A_i \\ &= \frac{1}{c} E_i \end{aligned} \tag{79}$$

$$\begin{aligned} F_{ij} &= \partial_i A_j - \partial_j A_i \\ &= B^k \epsilon_{ijk} \end{aligned} \tag{80}$$

ただし，ϵ_{ijk} はレヴィ-チビタテンソル，(完全反対称テンソルで，$\epsilon_{123} = 1$)，また，一つの項におなじ添え字が出てくるときは和をとるものとする（アインシュタインの規約)。

$$F_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{E_x}{c} & -\frac{E_y}{c} & -\frac{E_z}{c} \\ \frac{E_x}{c} & 0 & B_z & -B_y \\ \frac{E_y}{c} & -B_z & 0 & B_x \\ \frac{E_z}{c} & B_y & -B_x & 0 \end{pmatrix} \tag{81}$$

$$F^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{E_x}{c} & \frac{E_y}{c} & \frac{E_z}{c} \\ -\frac{E_x}{c} & 0 & B_z & -B_y \\ -\frac{E_y}{c} & -B_z & 0 & B_x \\ -\frac{E_z}{c} & B_y & -B_x & 0 \end{pmatrix} \tag{82}$$

3.2 Maxwell equation

current:

$$j^\mu = (\rho c, \mathbf{j}) \tag{83}$$

Maxwell equation:

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = -\mu_0 j^\nu \tag{84}$$

exercise. これを確かめよ。

恒等式：

$$\partial_\mu F_{\nu\lambda} + \partial_\nu F_{\lambda\mu} + \partial_\lambda F_{\mu\nu} = 0 \tag{85}$$

exercise. のこりの方程式が出ることを確かめよ。

3.3 conservation of current

Maxwell equation より

$$\partial_\nu \partial_\mu F^{\mu\nu} = -\mu_0 \partial_\nu j^\nu \tag{86}$$

F の反対称性より

$$\partial_\nu \partial_\mu F^{\mu\nu} = 0 \tag{87}$$

ゆえに

$$\partial_\nu j^\nu = 0 \tag{88}$$

これは

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{j} = 0 \tag{89}$$

である。

3.4 gauge transformation

$$A_\mu \to A_\mu + \partial_\mu \lambda \tag{90}$$

3.5 gauge condition

ローレンスゲージ

$$\nabla \cdot \mathbf{A} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial \phi}{\partial t} = 0 \tag{91}$$

は，次のように書ける。

$$\partial_\mu A^\mu = 0 \tag{92}$$

3.6 dual tensor

$$\tilde{F}^{\mu\nu} = \frac{1}{2}\epsilon^{\mu\nu\lambda\sigma} F_{\lambda\sigma} \tag{93}$$

ただし，$\epsilon^{\mu\nu\lambda\sigma}$ は完全反対称で $\epsilon^{0123} = 1$

$$\tilde{F}^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & B_x & B_y & B_z \\ -B_x & 0 & -\frac{E_z}{c} & \frac{E_y}{c} \\ -B_y & \frac{E_z}{c} & 0 & -\frac{E_x}{c} \\ -B_z & -\frac{E_y}{c} & \frac{E_x}{c} & 0 \end{pmatrix} \tag{94}$$

$$\partial_\mu \tilde{F}^{\mu\nu} = 0 \tag{95}$$

は

$$\partial_\mu F_{\nu\lambda} + \partial_\nu F_{\lambda\mu} + \partial_\lambda F_{\mu\nu} = 0 \tag{96}$$

と等価である。

3.7 invariant

$$\frac{1}{2}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} = -\frac{1}{c^2}\mathbf{E}^2 + \mathbf{B}^2 \tag{97}$$

$$\frac{1}{2}F_{\mu\nu}\tilde{F}^{\mu\nu} = -\frac{2}{c}\mathbf{E}\cdot\mathbf{B} \tag{98}$$

3.8 action

$$S = \int d^4x \left[-\frac{1}{4\mu_0}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + A_\mu j^\mu\right] \tag{99}$$

3.9 differential form

$$A = A_\mu dx^\mu \tag{100}$$

$$F = \frac{1}{2}F_{\mu\nu}dx^\mu \wedge dx^\nu \tag{101}$$

とすると

$$F = dA \tag{102}$$

ゲージ変換

$$A \to A + d\lambda \tag{103}$$

$d^2 = 0$ より，F は不変。