電磁気学（後期）

白石　清（山口大学理学部）

1999 年 04 月 01 日改訂

概 要

目 次

1　電磁波

1.1　波動方程式

ここしばらくは，電荷，電流のない空間を考え，それを「真空」と呼ぼう。

真空中での Maxwell 方程式

$$
\begin{aligned}
\nabla \cdot \mathbf{E} &= 0 & (1)\\
\nabla \cdot \mathbf{B} &= 0 & (2)\\
\nabla \times \mathbf{E} &= -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} & (3)\\
\nabla \times \mathbf{B} &= \frac{1}{c^2}\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} & (4)
\end{aligned}
$$

$(c^2 = \frac{1}{\epsilon_0 \mu_0})$

(3) と (4) から

$$
\begin{aligned}
\nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}) &= -\nabla \times \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}\\
&= -\frac{\partial}{\partial t}(\nabla \times \mathbf{B})\\
&= -\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} & (5)
\end{aligned}
$$

一方，恒等式

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{E}) - \nabla^2 \mathbf{E} \qquad (6)$$

があるので，われわれは

$$\nabla^2 \mathbf{E} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = 0 \qquad (7)$$

を得る。

(4) と (3) から

$$
\begin{aligned}
\nabla \times (\nabla \times \mathbf{B}) &= \frac{1}{c^2}\nabla \times \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}\\
&= \frac{1}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}(\nabla \times \mathbf{E})\\
&= -\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial t^2} & (8)
\end{aligned}
$$

も導かれるので，

$$\nabla^2\mathbf{B} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\mathbf{B}}{\partial t^2} = 0 \tag{9}$$

をも得る。

$\mathbf{E}$，$\mathbf{B}$ の各成分（直交座標で）は，同じ形の方程式（２階線形偏微分方程式）を満たしている。

これを波動方程式という。

1.2　波動方程式の解

$$\left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)F(z,t) = 0 \tag{10}$$

の解は

$$F(z,t) = f(z-ct) + g(z+ct) \tag{11}$$

ここで $f(x)$,$g(x)$ は任意の１変数関数。

$$E_x = E_0\sin(kz - \omega t) \tag{12}$$

とおく。ただし $\omega/k = c$
電場の他の成分は 0 とする。

このとき

$$\nabla\cdot\mathbf{E} = \frac{\partial E_x}{\partial x} = 0 \tag{13}$$

なので,（真空中の）ガウスの法則を満足している。

一方，

$$(\nabla\times\mathbf{E})_z = -\frac{\partial E_x}{\partial y} = 0 \tag{14}$$

$$\begin{aligned}(\nabla\times\mathbf{E})_y &= \frac{\partial E_x}{\partial z} = -\frac{\partial B_y}{\partial t} \\ &= kE_0\cos(kz-\omega t)\end{aligned} \tag{15}$$

このことから

$$B_y = \frac{k}{\omega} E_0 \sin(kz - \omega t) = \frac{E_0}{c} \sin(kz - \omega t) \tag{16}$$

磁場の他の成分は 0。

この磁場は，明らかに磁場に対するガウスの法則を満足する。
また以下のように，アンペール＋マクスウェルの法則を満足する。

$$(\nabla \times \mathbf{B})_z = 0 \tag{17}$$

$$\begin{aligned} (\nabla \times \mathbf{B})_x &= -\frac{\partial B_y}{\partial z} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial E_x}{\partial t} \\ &= -\frac{E_0}{c} k \cos(kz - \omega t) \\ &= -\frac{1}{c^2} E_0 \omega \cos(kz - \omega t) \end{aligned} \tag{18}$$

まとめると

$$\begin{cases} E_x = E_0 \sin(kz - \omega t) \\ B_y = B_0 \sin(kz - \omega t) = \frac{E_0}{c} \sin(kz - \omega t) \end{cases} \tag{19}$$

これはマクスウェル方程式の解。

これは z 軸方向に進む「電磁波」を表している。

波の山（谷）を結ぶと，x-y 平面に平行な面となっている。
このため,「平面電磁波」と呼ぶ。[1]

$\mathbf{E} \times \mathbf{B}$ が z 軸方向（進行方向）を向いていることに注意。

1.3 電場と磁場の対称性

真空中のマクスウェル方程式は

[1] 今，電磁波の話をしているのが明らかな場合は「平面波」でよい。

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{E} &= 0 && (20)\\ \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0 && (21)\\ \nabla \times \mathbf{E} &= -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} && (22)\\ \nabla \times \mathbf{B} &= \frac{1}{c^2}\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} && (23) \end{aligned}$$

である。

ここで，次のような置き換えをしてみよう。

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &\to c\mathbf{B} && (24)\\ \mathbf{B} &\to -\frac{\mathbf{E}}{c} && (25) \end{aligned}$$

そうすると，

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0 && (26)\\ \nabla \cdot \mathbf{E} &= 0 && (27)\\ c\nabla \times \mathbf{B} &= \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} && (28)\\ -\frac{1}{c}\nabla \times \mathbf{E} &= \frac{c}{c^2}\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} && (29) \end{aligned}$$

これらは，元のマクスウェル方程式と同一である。

マクスウェルの方程式の解が一組わかっていれば，さきの変換により，別の解が求まる。

$$\begin{cases} E_x = E_0 \sin(kz - \omega t) \\ B_y = B_0 \sin(kz - \omega t) = \frac{E_0}{c}\sin(kz - \omega t) \end{cases} \tag{30}$$

がマクスウェル方程式の解であることより，

$$\begin{cases} cB_x = E_0 \sin(kz - \omega t) \\ -\frac{E_y}{c} = B_0 \sin(kz - \omega t) = \frac{E_0}{c}\sin(kz - \omega t) \end{cases} \tag{31}$$

も，マクスウェル方程式の解である。

すなわち

$$\begin{cases} E_y = -E_0 \sin(kz - \omega t) \\ B_x = \frac{E_0}{c} \sin(kz - \omega t) \end{cases} \tag{32}$$

はマクスウェル方程式の解。この解も z 軸方向に進む電磁波を表す。

しかし，この解は自明。なぜならば z 軸を固定して，x-y 軸を９０度回転すれば，前の解から得られる。いま，空間は等方だから，当然解となっている。

$\mathbf{E} + ic\mathbf{B}$ という組み合わせを考えると，マクスウェル方程式は

$$\nabla \cdot (\mathbf{E} + ic\mathbf{B}) = 0 \tag{33}$$

$$\begin{aligned} \nabla \times (\mathbf{E} + ic\mathbf{B}) &= -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} + i\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \\ &= \frac{i}{c}\frac{\partial}{\partial t}(\mathbf{E} + ic\mathbf{B}) \end{aligned} \tag{34}$$

という２つの式になる。

上で見た「置き換え」は，この場合，式の複素共役をとることに対応する。

1.4　偏光

1.4.1　直線偏光

二つの平面波の解

$$\begin{cases} E_x = E_0 \sin(kz - \omega t) \\ B_y = B_0 \sin(kz - \omega t) = \frac{E_0}{c} \sin(kz - \omega t) \end{cases} \tag{35}$$

$$\begin{cases} E_y = -E_0 \sin(kz - \omega t) \\ B_x = \frac{E_0}{c} \sin(kz - \omega t) \end{cases} \tag{36}$$

は，方程式の解という意味からは，独立である。

一般の平面電磁波はこれらの（位相のずらしを含めた）重ね合わせで表せる。

二つの独立な状態を「偏光」（状態）という。

特に，この二つの解のようにそれぞれの電場の向きが一定であるとき，直線偏光（状態）と呼ぶ。

1.4.2 円偏光

二つの独立な状態は，直線偏光でなくてもよい。
たとえば (35)

$$\begin{cases} E_x = E_0 \sin(kz - \omega t) \\ B_y = \frac{E_0}{c} \sin(kz - \omega t) \end{cases} \tag{37}$$

と，(36) の位相をずらしたもの

$$\begin{cases} E_y = E_0 \cos(kz - \omega t) \\ B_x = -\frac{E_0}{c} \cos(kz - \omega t) \end{cases} \tag{38}$$

をたしたもの

$$E_x = E_0 \sin(kz - \omega t), \quad E_y = E_0 \cos(kz - \omega t) \tag{39}$$

$$B_y = \frac{E_0}{c} \sin(kz - \omega t), \quad B_x = -\frac{E_0}{c} \cos(kz - \omega t) \tag{40}$$

とひいたもの

$$E_x = E_0 \sin(kz - \omega t), \quad E_y = -E_0 \cos(kz - \omega t) \tag{41}$$

$$B_y = \frac{E_0}{c} \sin(kz - \omega t), \quad B_x = \frac{E_0}{c} \cos(kz - \omega t) \tag{42}$$

は，二つの独立な平面波の解である。

この二つの状態は「円偏光」と呼ばれる。

そのわけは，電場，磁場の大きさが一定

$$|\mathbf{E}| = E_0 \tag{43}$$

$$|\mathbf{B}| = \frac{E_0}{c} \tag{44}$$

だからである。二つの偏光は電場の回転の向きが逆である。

2 電磁場のエネルギー

いったん，電磁波から離れて，前期の復習も含め，電磁場のもつエネルギーについて考えよう。

2.1 電場のエネルギー

2.1.1 例１：平行板コンデンサ

S：板の面積
d：板の間隔

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon_0} = \frac{Q}{\epsilon_0 S} \tag{45}$$

σ は電荷密度。

高校物理を思い出せば

$$CV = Q \tag{46}$$

ここで C は（コンデンサの）静電容量。

$$V = Ed \tag{47}$$

なので

$$C = \frac{\epsilon_0 S}{d} \tag{48}$$

また

$$V = \frac{Qd}{\epsilon_0 S} \tag{49}$$

またまた高校物理を思い出すと[2]

$$\text{コンデンサに蓄えられたエネルギー} \quad U = \frac{1}{2}CV^2 \tag{50}$$

は次のようにも書ける。

$$\begin{aligned} U &= \frac{1}{2}CV^2 \\ &= \frac{1}{2}\frac{\epsilon_0 S}{d}\frac{Q^2 d^2}{\epsilon_0^2 S^2} \\ &= \frac{1}{2}\epsilon_0 \left(\frac{Q}{\epsilon_0 S}\right)^2 \underbrace{Sd}_{\text{体積}} \end{aligned} \tag{51}$$

[2] いま教えてるのかなあ？

問題　次の式の解釈は？

$$\Delta U = \frac{1}{2}\frac{Q}{\epsilon_0 S}Q\Delta d \tag{52}$$

$$\Delta U = \frac{Qd}{\epsilon_0 S}\Delta Q \tag{53}$$

(51) は，一様な電場 $\mathbf{E}$ が
エネルギー密度 $\frac{1}{2}\epsilon_0 E^2$ を持っていると解釈できる。

2.1.2　例２：球対称な電場

半径 a の球の表面に総電荷 Q が一様に分布している。
どれだけのエネルギーを持っているか？

いま，球が電荷 q を持っているとする。
無限遠方から，電荷 Δq をもってきて，この球に付け加えるのに必要な仕事の大きさは？

$$\begin{aligned}\Delta W &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_a^\infty \frac{q\Delta q}{r^2}dr \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{a}\Delta q\end{aligned} \tag{54}$$

したがって，$q=0$ から $q=Q$ にするまでに必要な仕事は

$$\begin{aligned}W &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_0^Q \frac{q}{a}dq \\ &= \frac{1}{8\pi\epsilon_0}\frac{Q^2}{a}\end{aligned} \tag{55}$$

この仕事が蓄えられている。

電場のエネルギー密度が $\frac{1}{2}\epsilon_0 E^2$ で与えられるとすると
$E_r = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q}{r^2}$ なので

$$
\begin{aligned}
U &= \int_V \frac{1}{2}\epsilon_0 E^2 d^3\mathbf{r} \\
&= 4\pi\frac{1}{2}\epsilon_0\left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\right)^2\int_a^\infty \frac{Q^2}{r^4}r^2 dr \\
&= \frac{1}{8\pi\epsilon_0}\frac{Q^2}{a} \qquad (56)
\end{aligned}
$$

$U = W$，すなわち仕事は電場のエネルギーとして蓄えられたと解釈できる。

2.1.3 まとめ

静電場 $\mathbf{E}$ の存在するところには，エネルギー密度

$$\frac{1}{2}\epsilon_0 E^2 \qquad (57)$$

が蓄えられている。

2.2 磁場のエネルギー

2.2.1 例１：ソレノイドコイル

長さに比べて太さが非常に小さいコイル。
内側の磁場はほぼ一様と見なせる。

アンペールの法則より

$$B\ell = \mu_0 n\ell I \qquad (58)$$

ℓ：コイルの長さ
n：単位長さあたりの巻き数
ゆえに

$$B = \mu_0 nI \qquad (59)$$

誘導起電力（自己誘導）
電流を増やそうとすると減らそうとする向きに起電力が生じる。（レンツの法則）

$$V = \frac{d\Phi}{dt} \quad \text{（大きさ）} \qquad (60)$$

コイルの有効磁束は

$$\Phi = n\ell\Phi_1 \tag{61}$$

Φ_1 はコイルの一断面積を貫く磁束。

$$\Phi_1 = BS = \mu_0 nIS \tag{62}$$

ゆえに

$$V = \mu_0 n^2 \ell S \frac{dI}{dt} \equiv L\frac{dI}{dt} \tag{63}$$

L はコイルの（自己）インダクタンスと呼ばれる。[3]

コイルに流れる電流を 0 から I に増やすときに必要な仕事を求める。電力を時間積分する。

$$\begin{aligned} W &= \int_{t_i}^{t_f} VI'dt \\ &= \int_{t_i}^{t_f} LI'\frac{dI'}{dt}dt \\ &= \int_0^I LI'dI' \\ &= \frac{1}{2}LI^2 \end{aligned} \tag{64}$$

（これも高校で習ったかな？）

ところで，(59)，(63) を使うと

$$\begin{aligned} W &= \frac{1}{2}\mu_0 n^2 \ell S I^2 \\ &= \frac{1}{2}\frac{1}{\mu_0}(\mu_0 nI)^2 S\ell \\ &= \frac{1}{2}\frac{1}{\mu_0}B^2 \underbrace{S\ell}_{\text{体積}} \end{aligned} \tag{65}$$

と書けるので，一様磁場がエネルギー密度 $\frac{1}{2}\frac{1}{\mu_0}B^2$ を蓄えていると解釈できる。

[3] 位相をずらす効果については，（いまつかわないので）省略。

2.2.2　例２：反平行平面電流

２枚の平行電流シート
互いに逆方向の向きに一様な電流（単位長さあたりの電流密度 j）が流れている。
d：シートの間隔

シートの間の一様磁場の大きさ（アンペールの法則より）

$$B = \mu_0 j \tag{66}$$

シートが反発する？
シートを引き離すと蓄えたエネルギーが減る？
No!
動かすときの誘導起電力まで考慮しないといけない。

$$V = -\frac{d\Phi}{dt} = -B\ell\frac{\Delta d}{\Delta t} \tag{67}$$

電流方向の単位長さあたり

$$V/\ell = E = -B\frac{\Delta d}{\Delta t} \tag{68}$$

これに逆らって，一定の j で電流を流す。
シートの単位面積あたり jE（ワット）の電力が必要。
したがって，Δt の間にシートを Δd 引き離すとき,（ただし，電流一定にする）必要な仕事は（単位面積あたり）

$$\begin{aligned}\Delta U &= |jE|\Delta t - \frac{1}{2}Bj\Delta d \\ &= jB\Delta d - \frac{1}{2}Bj\Delta d \\ &= \frac{1}{2}Bj\Delta d \\ &= \frac{1}{2}\mu_0 j^2\Delta d \\ &= \frac{1}{2}\frac{1}{\mu_0}B^2\Delta d \end{aligned} \tag{69}$$

やはり磁場はエネルギー密度 $\frac{1}{2}\frac{1}{\mu_0}B^2$ をもっていると解釈できる。

2.2.3　まとめ

静磁場 $\mathbf{B}$ の存在するところには，エネルギー密度

$$\frac{1}{2}\frac{1}{\mu_0}B^2 \tag{70}$$

が蓄えられている。

2.3　電磁場のエネルギー

電磁場は，

$$u = \frac{1}{2}\epsilon_0 E^2 + \frac{1}{2}\frac{1}{\mu_0}B^2 \tag{71}$$

のエネルギー密度を持つ。

u は置き換え

$$\mathbf{E} \rightarrow c\mathbf{B} \tag{72}$$

$$\mathbf{B} \rightarrow -\frac{1}{c}\mathbf{E} \tag{73}$$

に対して，不変。

たとえば，

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\epsilon_0 E^2 &\rightarrow \frac{1}{2}\epsilon_0 c^2 B^2 \\ &= \frac{1}{2}\epsilon_0 \frac{1}{\epsilon_0\mu_0}B^2 \\ &= \frac{1}{2}\frac{1}{\mu_0}B^2 \end{aligned} \tag{74}$$

2.4　電磁場のエネルギーの保存

エネルギーというからには，何らかの条件の下では保存しているはずである。

マクスウェル方程式をもとに調べてみよう。

Maxwell 方程式

$$
\begin{aligned}
\nabla \cdot \mathbf{E} &= \frac{\rho}{\epsilon_0} &(75)\\
\nabla \cdot \mathbf{B} &= 0 &(76)\\
\nabla \times \mathbf{E} &= -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} &(77)\\
\nabla \times \mathbf{B} &= \mu_0 \mathbf{j} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} &(78)
\end{aligned}
$$

(77) の両辺に $\mathbf{B}$ を内積すると

$$
\mathbf{B} \cdot \nabla \times \mathbf{E} = -\mathbf{B} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \tag{79}
$$

(78) の両辺に $\mathbf{E}$ を内積すると

$$
\mathbf{E} \cdot \nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{E} \cdot \mathbf{j} + \frac{1}{c^2}\mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \tag{80}
$$

(79) から (80) を引くと

$$
\mathbf{B} \cdot \nabla \times \mathbf{E} - \mathbf{E} \cdot \nabla \times \mathbf{B} = -\frac{1}{c^2}\mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} - \mathbf{B} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} - \mu_0 \mathbf{E} \cdot \mathbf{j} \tag{81}
$$

ところでベクトル解析の公式より

$$
\nabla \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{B}) \equiv \mathbf{B} \cdot \nabla \times \mathbf{E} - \mathbf{E} \cdot \nabla \times \mathbf{B} \tag{82}
$$

$$
\begin{aligned}
& \frac{\partial}{\partial x}(E_y B_z - E_z B_y) \\
+ \; & \frac{\partial}{\partial y}(E_z B_x - E_x B_z) \\
+ \; & \frac{\partial}{\partial z}(E_x B_y - E_y B_x) \\
= \; & B_z \left(\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} \right) \\
- \; & E_z \left(\frac{\partial B_y}{\partial x} - \frac{\partial B_x}{\partial y} \right) \\
+ \; & \cdots && (83)
\end{aligned}
$$

なので，これで (81) の左辺を書き換える。
また一方，

$$
\begin{aligned}
& \frac{1}{c^2}\mathbf{E}\cdot\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}+\mathbf{B}\cdot\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \\
= & \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2}\frac{1}{c^2}E^2+\frac{1}{2}B^2\right) \qquad (84)
\end{aligned}
$$

を右辺に用いる。
最後に両辺を μ_0 で割ると，次の式を得る。

$$
\frac{1}{\mu_0}\nabla\cdot(\mathbf{E}\times\mathbf{B}) = -\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2}\epsilon_0 E^2+\frac{1}{2}\frac{1}{\mu_0}B^2\right)-\mathbf{E}\cdot\mathbf{j} \qquad (85)
$$

領域 V，その境界 S を考える。
V 内の電磁場のエネルギーは

$$
U=\int_V u d^3\mathbf{r}=\int_V\left(\frac{1}{2}\epsilon_0 E^2+\frac{1}{2}\frac{1}{\mu_0}B^2\right)d^3\mathbf{r} \qquad (86)
$$

U の時間変化は，(85) とガウスの定理により，

$$
\frac{\partial U}{\partial t}=-\int_S\frac{1}{\mu_0}(\mathbf{E}\times\mathbf{B})\cdot d\vec{\sigma}-\int_V\mathbf{E}\cdot\mathbf{j}d^3\mathbf{r} \qquad (87)
$$

右辺第 2 項は，電流が電場の中を流れることにより発生する単位時間あたりのジュール熱を表す。

$$
\begin{aligned}
\int_V\mathbf{E}\cdot\mathbf{j}d^3\mathbf{r} &= \int_V\mathbf{E}\cdot(\hat{\rho}\mathbf{v})d^3\mathbf{r} \\
&= \int_V\hat{\rho}\mathbf{E}\cdot\mathbf{v}d^3\mathbf{r} \\
&= \int_V\underbrace{\mathbf{f}}_{\text{単位体積に働く力}}\cdot\mathbf{v}d^3\mathbf{r} \qquad (88)
\end{aligned}
$$

右辺第 1 項は，表面での寄与になっている。
これは境界の表面から出ていくエネルギーの流れの総和を表している。

$$
\mathbf{S}\equiv\frac{1}{\mu_0}\mathbf{E}\times\mathbf{B} \qquad (89)
$$

を Poynting's vector とよび，これがエネルギー（密度）の流れを表すものである。

2.5　電磁波におけるエネルギーの流れ

z 方向に進行する平面波

$$E_x = E_0 \sin(kz - \omega t) \tag{90}$$
$$B_y = \frac{E_0}{c} \sin(kz - \omega t) \tag{91}$$

このとき

$$u = \frac{1}{2}\epsilon_0 E^2 + \frac{1}{2}\frac{1}{\mu_0}B^2 \tag{92}$$
$$= \left(\frac{1}{2}\epsilon_0 E_0^2 + \frac{1}{2}\frac{1}{\mu_0}\frac{E_0^2}{c^2}\right)\sin^2(kz - \omega t) \tag{93}$$
$$= \epsilon_0 E_0^2 \sin^2(kz - \omega t) \tag{94}$$

一方ポインティングベクトルの大きさは

$$|\mathbf{S}| = \frac{1}{\mu_0}(\mathbf{E}\times\mathbf{B})_z \tag{95}$$
$$= \frac{1}{\mu_0}E_0\frac{E_0}{c}\sin^2(kz - \omega t) \tag{96}$$
$$= c\epsilon_0 E_0^2 \sin^2(kz - \omega t) = cu \tag{97}$$

エネルギー密度が光の速度で z 方向に流れている。

$\mathbf{S}/c^2$ は，運動量密度を与える。

電磁波の場合，

$$\text{運動量密度} \times c = \text{エネルギー密度} \tag{98}$$

光子の運動量とエネルギーの関係と比較せよ。[4]

3　平面波の反射，屈折

3.1　物質境界面

3.1.1　物質中のマクスウェル方程式

反射，屈折は異なる物質の境界面で起きる。

[4] $p = \frac{h\nu}{c}$，$E = h\nu$

ここでは，境界は平面の場合のみ扱う。

物質は真空とどうちがうか？
物質の電気磁気的性質 ⋯ 誘電率，透磁率が物質により異なる。
もちろん，個々の物質の特有な性質もあるが，[5]
「第０近似」として，誘電率，透磁率のみによって性質が表されるとしよう。[6]

ではマクスウェル方程式は

$$\begin{aligned} \nabla\cdot\mathbf{E} &= \frac{\rho}{\epsilon} && (99)\\ \nabla\cdot\mathbf{B} &= 0 && (100)\\ \nabla\times\mathbf{E} &= -\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t} && (101)\\ \nabla\times\mathbf{B} &= \mu\mathbf{j}+\epsilon\mu\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t} && (102) \end{aligned}$$

でよいか？
境界を扱うくらいだから，ϵ，μ は少なくとも空間的に変化している場合も取り扱えるようにする。

そのためには，次のようにする。

$$\begin{aligned} \nabla\cdot(\epsilon\mathbf{E}) &= \rho && (103)\\ \nabla\cdot\mathbf{B} &= 0 && (104)\\ \nabla\times\mathbf{E} &= -\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t} && (105)\\ \nabla\times\frac{\mathbf{B}}{\mu} &= \mathbf{j}+\frac{\partial(\epsilon\mathbf{E})}{\partial t} && (106) \end{aligned}$$

こうすることにより，保存の式

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\nabla\cdot\mathbf{j}=0 \qquad (107)$$

は ϵ，μ の空間（時間）依存性に関わらず成立する。

$$\begin{aligned} \mathbf{D} &\equiv \epsilon\mathbf{E} && (108)\\ \mathbf{H} &\equiv \frac{\mathbf{B}}{\mu} && (109) \end{aligned}$$

[5] 「物性の研究室」で研究する！
[6] 方向によって性質が異なる場合もここでは考えない。

を定義する。このときマクスウェル方程式は

$$
\begin{aligned}
\nabla \cdot \mathbf{D} &= \rho & (110)\\
\nabla \cdot \mathbf{B} &= 0 & (111)\\
\nabla \times \mathbf{E} &= -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} & (112)\\
\nabla \times \mathbf{H} &= \mathbf{j} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} & (113)
\end{aligned}
$$

と書ける。

3.1.2 境界での接続の式

媒質 1 と媒質 2 の境界面を考える。
面に垂直な単位ベクトル（法線ベクトル）を n とする。
また，面に平行な（ある方向の）単位ベクトルを t とする。

電場および磁場に対するガウスの法則より，

$$
\begin{aligned}
\mathbf{D}_1 \cdot \mathbf{n} &= \mathbf{D}_2 \cdot \mathbf{n} & (114)\\
\mathbf{B}_1 \cdot \mathbf{n} &= \mathbf{B}_2 \cdot \mathbf{n} & (115)
\end{aligned}
$$

（境界面に電荷はない）

マクスウェル方程式の残り 2 つより，

$$
\begin{aligned}
\mathbf{E}_1 \cdot \mathbf{t} &= \mathbf{E}_2 \cdot \mathbf{t} & (116)\\
\mathbf{H}_1 \cdot \mathbf{t} &= \mathbf{H}_2 \cdot \mathbf{t} & (117)
\end{aligned}
$$

（境界面に電流はない。また，ループを十分細くとれば貫く磁束は無視できる。）

3.2 平面波の反射・屈折

媒質 1 の誘電率，透磁率を ϵ_1，μ_1，
媒質 2 の誘電率，透磁率を ϵ_2，μ_2
とする。

3.2.1 電場が境界と平行な場合

入射角を α，屈折角を β，反射角を γ とする。

入射波

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 \sin(k_x x + k_z z - \omega t) \tag{118}$$

屈折波

$$\mathbf{E}' = \mathbf{E}_0{}' \sin(k_x{}' x + k_z{}' z - \omega t) \tag{119}$$

反射波

$$\mathbf{E}'' = \mathbf{E}_0{}'' \sin(k_x{}'' x + k_z{}'' z - \omega t) \tag{120}$$

ここで，ω は共通。

x 方向に何も「力」は働かないので，

$$k_x = k_x{}' = k_x{}'' \tag{121}$$

$$k \equiv \sqrt{k_x^2 + k_z^2} \tag{122}$$

$$k' \equiv \sqrt{k_x{}'^2 + k_z{}'^2} \tag{123}$$

$$k'' \equiv \sqrt{k_x{}''^2 + k_z{}''^2} \tag{124}$$

とすれば

$$k_x = k \sin\alpha = k' \sin\beta = k'' \sin\gamma \tag{125}$$

また，

$$v_1 \equiv \frac{1}{\sqrt{\epsilon_1 \mu_1}}, \quad v_2 \equiv \frac{1}{\sqrt{\epsilon_2 \mu_2}} \tag{126}$$

とすれば

$$k = \frac{\omega}{v_1} \tag{127}$$

$$k' = \frac{\omega}{v_2} \tag{128}$$

$$k'' = \frac{\omega}{v_1} \tag{129}$$

この式と (121) および (125) から

$$\sin\alpha = \sin\gamma = \frac{v_1}{v_2}\sin\beta \tag{130}$$

がわかる。

すなわち

$$\alpha = \gamma \tag{131}$$

（入射角＝反射角）

および

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \frac{v_1}{v_2} = \frac{n_2}{n_1} \tag{132}$$

これをスネルの法則 (Snell's law) という。
ここで n は屈折率。

磁場の振幅は

$$B_0 = \frac{E_0}{v_1} \tag{133}$$

$$B_0{}' = \frac{E_0{}'}{v_2} \tag{134}$$

$$B_0{}'' = \frac{E_0{}''}{v_1} \tag{135}$$

接続の式 (116) より

$$E_0 + E_0{}'' = E_0{}' \tag{136}$$

接続の式 (117) より

$$\frac{B_0}{\mu_1}\cos\alpha - \frac{B_0{}''}{\mu_1}\cos\gamma = \frac{B_0{}'}{\mu_2}\cos\beta \tag{137}$$

上の 3 つの式および $\alpha = \gamma$，スネルの法則より，

$$E_0 - E_0{}'' = \frac{\mu_1}{\mu_2}\frac{\sin\alpha}{\sin\beta}\frac{\cos\beta}{\cos\alpha}E_0{}' \tag{138}$$

を得る。

さらに，現実の（特に光を通すような物質では）

$$\mu_1 \approx \mu_2 \approx \mu_0 \tag{139}$$

なので，これを使うと

$$E_0 : {E_0}' : {E_0}'' = \sin(\alpha+\beta) : 2\sin\beta\cos\alpha : \sin(\beta-\alpha) \tag{140}$$

これをフレネルの第一公式 (Fresnel's formula ＃ 1) という。

$n_2 > n_1$ のとき，$\alpha > \beta$。ゆえに $\sin(\beta-\alpha) < 0$。

（「位相」の反転をあらわす。）

問題

接続の式のうち，二つしか使っていません。

残りの 2 つはよいのでしょうか？

3.2.2 磁場が境界と平行な場合

スネルの法則までは同様に成り立つ。

接続の式 (117) より

$$\frac{B_0}{\mu_1} + \frac{{B_0}''}{\mu_1} = \frac{{B_0}'}{\mu_2} \tag{141}$$

電場と磁場の大きさの関係，ならびにスネルの法則より

$$E_0 + {E_0}'' = \frac{\mu_1}{\mu_2}\frac{\sin\alpha}{\sin\beta}{E_0}' \tag{142}$$

接続の式 (116) より

$$E_0\cos\alpha - {E_0}''\cos\gamma = {E_0}'\cos\beta \tag{143}$$

ゆえに

$$E_0 - {E_0}'' = \frac{\cos\beta}{\cos\alpha}{E_0}' \tag{144}$$

$$\mu_1 \approx \mu_2 \approx \mu_0 \tag{145}$$

を使うと

$$E_0 : {E_0}' : {E_0}'' = \tan(\alpha+\beta) : \frac{2\sin\beta\cos\alpha}{\cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta)} : \tan(\alpha-\beta) \tag{146}$$

これをフレネルの第二公式 (Fresnel's formula ＃ 2) という。

3.3 反射率

ポインティングベクトルの大きさの比は

$$|\mathbf{S}| : |\mathbf{S}'| : |\mathbf{S}''| = \frac{1}{\mu_1}\frac{E_0^2}{v_1} : \frac{1}{\mu_2}\frac{{E_0}'^2}{v_2} : \frac{1}{\mu_1}\frac{{E_0}''^2}{v_1} : \tag{147}$$

である。

反射率を

$$R = \frac{|\mathbf{S}''|}{|\mathbf{S}|} = \frac{{E_0}''^2}{E_0^2} \tag{148}$$

とすると，

1　電場が境界に平行な場合

$$R_1 = \frac{\sin^2(\alpha - \beta)}{\sin^2(\alpha + \beta)} \tag{149}$$

2　磁場が境界に平行な場合

$$R_2 = \frac{\tan^2(\alpha - \beta)}{\tan^2(\alpha + \beta)} \tag{150}$$

２のばあい，おもしろいことがわかる。
$\alpha + \beta = \pi/2$ となるとき，$R_2 = 0$ [7]
このとき，磁場が境界に平行な反射波はなくなる。
（Brewstar's law）
つまり，それ以外の「偏光」のみとなる。
（このため，偏光サングラスをかけると，水面からの反射光などがまぶしくなくなる。）

3.4 透過率

透過率を

$$T = \frac{|\mathbf{S}'|}{|\mathbf{S}|} \tag{151}$$

とする。

[7] このとき，$\sin\beta = \cos\alpha$，ゆえに $\tan\alpha = n_2/n_1$。

さらに，

$$\mu_1 \approx \mu_2 \approx \mu_0 \tag{152}$$

とすると，
透過率は

$$T = \frac{v_1}{v_2}\frac{{E_0'}^2}{E_0^2} = \frac{n_2}{n_1}\frac{{E_0'}^2}{E_0^2} \tag{153}$$

と書ける。

問題

２つの場合に透過率を求めよ。

問題

$\alpha \to 0$ の場合（境界面に垂直に入射する場合）に，

反射率と透過率を屈折率を用いて表せ。

２つの場合とも同じ結果になるはずである。

答え：

$$R = \left(\frac{n_2 - n_1}{n_2 + n_1}\right)^2 \tag{154}$$

$$T = \frac{4n_1 n_2}{(n_2 + n_1)^2} \tag{155}$$

したがって

$$R + T = 1 \tag{156}$$

（この関係は $\alpha \to 0$ の場合以外でも成り立つか？）

4　電磁波の放射

4.1　時間に依存する電磁場

4.1.1　ポテンシャルの解

真空中で時間に依存する電磁場を，電荷密度，電流密度が与えられたときに求めたい。

そのために,（ゲージ）ポテンシャルの「解」をまず求めよう。

解くべき式は（前期ノート参照）

$$
\begin{aligned}
-\nabla^2\mathbf{A}+\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\mathbf{A}}{\partial t^2} &= \mu_0\mathbf{j} &(157)\\
-\nabla^2\phi+\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} &= \frac{\rho}{\epsilon_0} &(158)
\end{aligned}
$$

である。
ここで全てのものは，時間にも（位置にも）依存している。

ここで，いきなり解を紹介しよう。
それは

$$
\begin{aligned}
\phi(\mathbf{r},t) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_V \frac{\rho(\mathbf{r}',t-R/c)}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}d^3\mathbf{r}' &(159)\\
\mathbf{A}(\mathbf{r},t) &= \frac{\mu_0}{4\pi}\int_V \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}',t-R/c)}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}d^3\mathbf{r}' &(160)
\end{aligned}
$$

である。
ここで

$$R=|\mathbf{r}-\mathbf{r}'| \tag{161}$$

である。

ρ が時間に依存しない場合，

$$\phi(\mathbf{r})=\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_V \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}d^3\mathbf{r}' \tag{162}$$

となり，前に求めた静電ポテンシャルの解が導かれる。

4.1.2 解の「説明」

$$\phi(\mathbf{r},t)=\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_V \frac{\rho(\mathbf{r}',t-R/c)}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}d^3\mathbf{r}' \tag{163}$$

が

$$-\nabla^2\phi+\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2}=\frac{\rho}{\epsilon_0} \tag{164}$$

を満たすことを示そう。

領域 V を V_δ と $V_{-\delta}$ に分ける。

ここで V_δ は $\mathbf{r}$ のごく小さい近傍の領域とする。

$$\begin{aligned}\nabla^2\phi(\mathbf{r},t) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_{V_\delta}\nabla^2\frac{\rho(\mathbf{r}',t-R/c)}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}d^3\mathbf{r}' \\ &+ \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_{V_{-\delta}}\nabla^2\frac{\rho(\mathbf{r}',t-R/c)}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}d^3\mathbf{r}' \end{aligned} \tag{165}$$

右辺第一項においては，V_δ 内では R は非常に小さいので

$$t' \equiv t - \frac{R}{c} \approx t \tag{166}$$

つまり「時間の差」は無視できる。したがって静電ポテンシャルの時と同様に

$$\text{右辺第一項} = -\frac{\rho(\mathbf{r},t)}{\epsilon_0} \tag{167}$$

となる。

右辺第二項において，∇^2 のかかる関数は R のみの関数であるから，

$$\nabla^2 \to \frac{1}{R}\frac{\partial^2}{\partial R^2}R \tag{168}$$

としてよい。
よって[8]

$$\begin{aligned}\nabla^2\frac{\rho(\mathbf{r}',t-R/c)}{R} &= \frac{1}{R}\frac{\partial^2}{\partial R^2}\rho(\mathbf{r}',t-R/c) \\ &= \frac{1}{c^2R}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\rho(\mathbf{r}',t-R/c)\end{aligned} \tag{169}$$

以上の計算から，(163) が (164) を満たすことが示された。

同様に，$\mathbf{A}$ の解についてもチェックできる。

> ちゃんとした解の導出は，フーリエ変換のテクニックを使えばできます。
>
> 一般にフーリエ変換は，場の理論を扱うのに便利な道具です。
>
> 挑戦してみて下さい。

[8] ∇^2 は $\mathbf{r}'$ には作用しないことに注意。

4.1.3 解のゲージ条件

さて，そもそもポテンシャルに対する方程式は，ローレンス（ゲージ）条件

$$\nabla\cdot\mathbf{A}+\frac{1}{c^2}\frac{\partial\phi}{\partial t}=0 \tag{170}$$

のもとで成り立つ式だった。

ここで求めた解は，条件を満たしているか，確かめてみよう。

$$\begin{aligned}\nabla\cdot\frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}',t-R/c)}{R} &= \frac{1}{R}\nabla\cdot\mathbf{j}(\mathbf{r}',t-R/c)+\mathbf{j}(\mathbf{r}',t-R/c)\cdot\nabla\frac{1}{R}\\ &= \frac{1}{R}(\nabla R)\cdot\frac{\partial\mathbf{j}(\mathbf{r}',t-R/c)}{\partial R}+\mathbf{j}(\mathbf{r}',t-R/c)\cdot\nabla\frac{1}{R}\end{aligned} \tag{171}$$

であるが，[9]

$$\begin{aligned}\nabla f(R) &= \frac{\partial}{\partial\mathbf{R}}f(R)\\ &= \frac{\partial}{\partial(\mathbf{r}-\mathbf{r}')}f(R)\\ &= -\frac{\partial}{\partial(\mathbf{r}'-\mathbf{r})}f(R)\\ &= -\nabla' f(R)\end{aligned} \tag{172}$$

（∇' は r' に作用する演算子）なので，

$$\nabla\cdot\frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}',t-R/c)}{R}=-\frac{1}{R}(\nabla' R)\cdot\frac{\partial\mathbf{j}(\mathbf{r}',t-R/c)}{\partial R}-\mathbf{j}(\mathbf{r}',t')\cdot\nabla'\frac{1}{R} \tag{173}$$

となる。

一方，次のものを考えてみる。

$$\begin{aligned}&\nabla'\cdot\frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}',t-R/c)}{R}\\ =&\ \frac{1}{R}\nabla'\cdot\mathbf{j}(\mathbf{r}',t-R/c)+\mathbf{j}(\mathbf{r}',t')\cdot\nabla'\frac{1}{R}\\ =&\ \frac{1}{R}\underbrace{\nabla'\cdot\mathbf{j}(\mathbf{r}',t')}_{\text{最初の }\mathrm{r}'\text{にのみ作用}}+\frac{1}{R}(\nabla' R)\cdot\frac{\partial\mathbf{j}(\mathbf{r}',t-R/c)}{\partial R}+\mathbf{j}(\mathbf{r}',t')\cdot\nabla'\frac{1}{R}\end{aligned} \tag{174}$$

[9] ∇ は R にのみ作用し，$\mathbf{r}'$ に作用しない。

前の計算と合わせると，

$$\nabla\cdot\frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}',t-R/c)}{R}+\nabla'\cdot\frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}',t-R/c)}{R}=\frac{1}{R}\underbrace{\nabla'\cdot\mathbf{j}(\mathbf{r}',t')}_{\text{最初の }\mathbf{r}'\text{にのみ作用}} \tag{175}$$

これを用いると，ベクトルポテンシャルの発散は

$$\begin{aligned}\nabla\cdot\mathbf{A} &= \frac{\mu_0}{4\pi}\int_V \nabla\cdot\frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}',t-R/c)}{R}d^3\mathbf{r}' \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi}\int_V \frac{1}{R}\underbrace{\nabla'\cdot\mathbf{j}(\mathbf{r}',t')}_{\text{最初の }\mathbf{r}'\text{にのみ作用}} \end{aligned}\tag{176}$$

と書ける。ただし，表面項になる部分は，V が十分大きいため無視できるとした。

一方，スカラーポテンシャルの時間偏微分は

$$\begin{aligned}\frac{1}{c^2}\frac{\partial\phi}{\partial t} &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0c^2}\int_V \frac{1}{R}\frac{\partial}{\partial t}\rho(\mathbf{r}',t-R/c)d^3\mathbf{r}' \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0c^2}\int_V \frac{1}{R}\frac{\partial}{\partial t'}\rho(\mathbf{r}',t')d^3\mathbf{r}' \end{aligned}\tag{177}$$

となるので，
結局

$$\nabla\cdot\mathbf{A}+\frac{1}{c^2}\frac{\partial\phi}{\partial t}=\frac{\mu_0}{4\pi}\int_V\frac{1}{R}\left(\underbrace{\nabla'\cdot\mathbf{j}(\mathbf{r}',t')}_{\mathbf{r}'}+\frac{\partial\rho(\mathbf{r}',t')}{\partial t'}\right)d^3\mathbf{r}' \tag{178}$$

であることがわかるが，保存の式よりこの右辺は 0。
よって解はローレンスゲージ条件を満足していることが確かめられた。

4.2 電気双極子放射

4.2.1 十分遠方でのベクトルポテンシャルの解

時間的に振動する電気双極子 $\mathbf{p}(t)$ を考える。
双極子は原点にあり，向きは z 方向とする。
最終的には，電荷の大きさが振動すると思っても，長さが振動すると思ってもよいが，
とりあえず電荷が時間的に振動するとしてみよう。

原点から十分遠方での電磁場を求める。

振動する電気双極子による電流は

$$I(t) = \frac{dq}{dt} \tag{179}$$

なので，

$$\begin{aligned}
\mathbf{A}(\mathbf{r},t) &= \frac{\mu_0}{4\pi}\int_V \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}',t')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}d^3\mathbf{r}' \\
&\approx \frac{\mu_0 \dot{q}(t')}{4\pi r}\int_{-\ell/2}^{\ell/2} d\mathbf{z} \\
&= \frac{\mu_0 \dot{q}(t')}{4\pi r}\vec{\ell} \\
&= \frac{\mu_0 \dot{\mathbf{p}}(t')}{4\pi r} \qquad (180)
\end{aligned}$$

を得る。
ただし，ここで

$$t' = t - \frac{R}{c} \tag{181}$$

また十分遠方では $R \approx r$ とした。

スカラーポテンシャル ϕ は，この $\mathbf{A}$ とローレンス条件から求める。

その準備として，極座標でのベクトル解析を復習しよう。

4.2.2 極座標でのベクトル解析１：発散

計量

微小な座標間隔の長さの２乗を

$$ds^2 = g_{ij}dx^i dx^j \tag{182}$$

とする。１つの項のうちで２回でてくる添え字については和をとるものとする。[10]

g_{ij} を計量と呼ぶ。

デカルト座標では

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 \tag{183}$$

[10] $ds^2 = \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3} g_{ij}dx^i dx^j$

であり，

$$x^1 = x, \quad x^2 = y, \quad x^3 = z \tag{184}$$

とすれば

$$g_{11} = g_{22} = g_{33} = 1 \tag{185}$$

である。

極座標では

$$ds^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2\theta d\varphi^2 \tag{186}$$

であり，

$$x^1 = r, \quad x^2 = \theta, \quad x^3 = \varphi \tag{187}$$

とすれば

$$g_{11} = 1, \quad g_{22} = r^2, \quad g_{33} = r^2 \sin^2\theta \tag{188}$$

である。

ベクトルの大きさ

普通のベクトル[11] のおおきさも計量を使って決められる。

$$A^2 = g_{ij} A^i A^j \tag{189}$$

ただし，通常使われる極座標での成分と違いがあるので気をつける。通常使われる極座標での成分 A^r，A^θ，A^φ では

$$A^2 = (A^r)^2 + (A^\theta)^2 + (A^\varphi)^2 \tag{190}$$

と定義されているので，

$$A^1 = A^r, \quad A^2 = \frac{1}{r} A^\theta, \quad A^3 = \frac{1}{r\sin\theta} A^\varphi \tag{191}$$

という関係になっている。

ベクトルの発散

一般にベクトルの発散は

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{1}{\sqrt{g}} \partial_i \left(\sqrt{g} A^i \right) \tag{192}$$

[11] 普通でないベクトルは後で出てくる。

で表される。
ただしここで $\partial_i \equiv \frac{\partial}{\partial x^i}$
$g \equiv \det g_{ij}$ である。[12]

極座標では

$$\sqrt{g} = r^2 \sin\theta \tag{193}$$

極座標で発散は次のように表される。

$$\begin{aligned}
\nabla \cdot \mathbf{A} &= \frac{1}{\sqrt{g}} \partial_i \left(\sqrt{g} A^i \right) \\
&= \frac{1}{r^2 \sin\theta} \left[\partial_r \left(r^2 \sin\theta A^1 \right) + \partial_\theta \left(r^2 \sin\theta A^2 \right) + \partial_\varphi \left(r^2 \sin\theta A^3 \right) \right] \\
&= \frac{1}{r^2} \partial_r \left(r^2 A^1 \right) + \frac{1}{\sin\theta} \partial_\theta \left(\sin\theta A^2 \right) + \partial_\varphi A^3
\end{aligned} \tag{194}$$

ここで

$$\partial_1 = \partial_r = \frac{\partial}{\partial r} \tag{195}$$

$$\partial_2 = \partial_\theta = \frac{\partial}{\partial \theta} \tag{196}$$

$$\partial_3 = \partial_\varphi = \frac{\partial}{\partial \varphi} \tag{197}$$

とした。

通常の極座標におけるベクトルの成分を使って書くと

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{1}{r^2} \partial_r \left(r^2 A^r \right) + \frac{1}{r \sin\theta} \partial_\theta \left(\sin\theta A^\theta \right) + \frac{1}{r \sin\theta} \partial_\varphi A^\varphi \tag{198}$$

4.2.3 十分遠方でのスカラーポテンシャルの解

ベクトルポテンシャルの解

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \frac{\mu_0 \dot{\mathbf{p}}(t')}{4\pi r} \tag{199}$$

を通常の極座標の成分で書くと，

$$A^r = \frac{\mu_0 \dot{p}}{4\pi r} \cos\theta \tag{200}$$

$$A^\theta = -\frac{\mu_0 \dot{p}}{4\pi r} \sin\theta \tag{201}$$

$$A^\varphi = 0 \tag{202}$$

[12] 極座標のような局所的に直交した座標系では，$g = g_{11} g_{22} g_{33}$

（ここで $\dot{p}$ は $\dot{\mathbf{p}}$ の z 成分。）

これを使って，ベクトルポテンシャルの発散を計算。

$$\begin{aligned}\nabla\cdot\mathbf{A} &= \frac{1}{r^2}\partial_r\left(r^2A^r\right)+\frac{1}{r\sin\theta}\partial_\theta\left(\sin\theta A^\theta\right)+\frac{1}{r\sin\theta}\partial_\varphi A^\varphi \\ &= \frac{\mu_0\dot{p}}{4\pi r^2}\cos\theta-\frac{\mu_0\ddot{p}}{4\pi cr}\cos\theta-\frac{\mu_0\dot{p}}{2\pi r^2}\cos\theta \\ &= -\frac{\mu_0}{4\pi}\left(\frac{\ddot{p}}{cr}+\frac{\dot{p}}{r^2}\right)\cos\theta \end{aligned} \tag{203}$$

ここで

$$\frac{\partial}{\partial r}\dot{p}(t-r/c)=-\frac{\ddot{p}}{c} \tag{204}$$

を使った。

ポテンシャルはローレンス条件を満たしていることから，

$$\frac{\partial\phi}{\partial t}=-c^2\nabla\cdot\mathbf{A} \tag{205}$$

したがって

$$\begin{aligned}\phi &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{\dot{p}}{cr}+\frac{p}{r^2}\right)\cos\theta \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{\mathbf{r}\cdot\dot{\mathbf{p}}}{cr^2}+\frac{\mathbf{r}\cdot\mathbf{p}}{r^3}\right)\end{aligned} \tag{206}$$

まとめると

$$\mathbf{A} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\dot{\mathbf{p}}}{r} \tag{207}$$

$$\phi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{\mathbf{r}\cdot\dot{\mathbf{p}}}{cr^2}+\frac{\mathbf{r}\cdot\mathbf{p}}{r^3}\right) \tag{208}$$

ただし，右辺は時刻 $t'=t-r/c$ での値。

4.2.4　極座標でのベクトル解析２：電場と磁場

上付き添え字と下付添え字

一般には，上付き添え字のベクトルと下付添え字のベクトルは区別される。

ベクトルの大きさの 2 乗は

$$A^2 = g_{ij}A^iA^j = g^{ij}A_iA_j \tag{209}$$

ここで g^{ij} は g_{ij} の逆行列。

極座標では

$$\begin{aligned} A^2 &= (A^1)^2 + r^2(A^2)^2 + r^2\sin^2\theta(A^3)^2 \\ &= (A_1)^2 + \frac{1}{r^2}(A_2)^2 + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}(A_3)^2 \end{aligned} \tag{210}$$

一方，通常の記法では

$$\begin{aligned} A^2 &= (A^r)^2 + (A^\theta)^2 + (A^\varphi)^2 \\ &= (A_r)^2 + (A_\theta)^2 + (A_\varphi)^2 \end{aligned} \tag{211}$$

なので，

$$A_1 = A_r = A^r \tag{212}$$

$$A_2 = rA_\theta = rA^\theta \tag{213}$$

$$A_3 = r\sin\theta A_\varphi = r\sin\theta A^\varphi \tag{214}$$

という対応関係である。

<u>電場</u>

$$\mathbf{E} = -\nabla\phi - \frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t} \tag{215}$$

これは，次のように読む。

$$E_i = -\partial_i\phi - \frac{\partial A_i}{\partial t} \tag{216}$$

極座標における通常の記法で表せば，次のようになる。

$$E_r = -\partial_r\phi - \frac{\partial A_r}{\partial t} \tag{217}$$

$$E_\theta = -\frac{1}{r}\partial_\theta\phi - \frac{\partial A_\theta}{\partial t} \tag{218}$$

$$E_\varphi = -\frac{1}{r\sin\theta}\partial_\varphi\phi - \frac{\partial A_\varphi}{\partial t} \tag{219}$$

磁場

磁場は残念ながら，普通のベクトルではないので注意する。
一般には複雑なのでここでは極座標の場合だけを考える。

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} \tag{220}$$

これを，次のように読む。

$$B_1 = \partial_2 A_3 - \partial_3 A_2 \tag{221}$$
$$B_2 = \partial_3 A_1 - \partial_1 A_3 \tag{222}$$
$$B_3 = \partial_1 A_2 - \partial_2 A_1 \tag{223}$$

極座標の場合，

$$B_1 = \partial_\theta \left(r \sin\theta A_\varphi\right) - \partial_\varphi \left(r A_\theta\right) \tag{224}$$
$$B_2 = \partial_\varphi A_r - \partial_r \left(r \sin\theta A_\varphi\right) \tag{225}$$
$$B_3 = \partial_r \left(r A_\theta\right) - \partial_\theta A_r \tag{226}$$

となる。ここまでは今までのルールに従う。
ここからが違うところで，ここでは天下りに書くと，

$$B^r = \frac{1}{r^2 \sin\theta} B_1 \tag{227}$$
$$B^\theta = \frac{1}{r \sin\theta} B_2 \tag{228}$$
$$B^\varphi = \frac{1}{r} B_3 \tag{229}$$

これが普通のベクトルと違うところである。[13]

したがって

$$B^r = \frac{1}{r \sin\theta} \partial_\theta \left(\sin\theta A_\varphi\right) - \frac{1}{r^2 \sin\theta} \partial_\varphi \left(r A_\theta\right) \tag{230}$$
$$B^\theta = \frac{1}{r \sin\theta} \partial_\varphi A_r - \frac{1}{r} \partial_r \left(r A_\varphi\right) \tag{231}$$
$$B^\varphi = \frac{1}{r} \partial_r \left(r A_\theta\right) - \frac{1}{r} \partial_\theta A_r \tag{232}$$

と書ける。

[13] $B^r = \frac{1}{\sqrt{g_{22} g_{33}}} B_1$，$B^\theta = \frac{1}{\sqrt{g_{33} g_{11}}} B_2$，$B^\varphi = \frac{1}{\sqrt{g_{11} g_{22}}} B_3$

4.2.5 電気双極子放射の電磁場

$$E_r = -\partial_r\phi - \frac{\partial A_r}{\partial t} \tag{233}$$
$$E_\theta = -\frac{1}{r}\partial_\theta\phi - \frac{\partial A_\theta}{\partial t} \tag{234}$$
$$E_\varphi = -\frac{1}{r\sin\theta}\partial_\varphi\phi - \frac{\partial A_\varphi}{\partial t} \tag{235}$$

$$B^r = \frac{1}{r\sin\theta}\partial_\theta\left(\sin\theta A_\varphi\right) - \frac{1}{r^2\sin\theta}\partial_\varphi\left(rA_\theta\right) \tag{236}$$
$$B^\theta = \frac{1}{r\sin\theta}\partial_\varphi A_r - \frac{1}{r}\partial_r\left(rA_\varphi\right) \tag{237}$$
$$B^\varphi = \frac{1}{r}\partial_r\left(rA_\theta\right) - \frac{1}{r}\partial_\theta A_r \tag{238}$$

以上の式に，ポテンシャルの解

$$A^r = \frac{\mu_0\dot{p}}{4\pi r}\cos\theta \tag{239}$$
$$A^\theta = -\frac{\mu_0\dot{p}}{4\pi r}\sin\theta \tag{240}$$
$$A^\varphi = 0 \tag{241}$$

および

$$\phi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{\dot{p}}{cr} + \frac{p}{r^2}\right)\cos\theta \tag{242}$$

を代入する。

ちょっとした計算をすると，結果は

$$E_r = \frac{1}{2\pi\epsilon_0}\left(\frac{\dot{p}}{cr^2} + \frac{p}{r^3}\right)\cos\theta \tag{243}$$
$$E_\theta = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{\ddot{p}}{c^2r} + \frac{\dot{p}}{cr^2} + \frac{p}{r^3}\right)\sin\theta \tag{244}$$
$$E_\varphi = 0 \tag{245}$$

および

$$B^r = 0 \tag{246}$$
$$B^\theta = 0 \tag{247}$$
$$B^\varphi = \frac{\mu_0}{4\pi}\left(\frac{\ddot{p}}{cr} + \frac{\dot{p}}{r^2}\right)\sin\theta \tag{248}$$

r がおおきいところでもっとも大きな寄与をする項だけをのこすと

$$E_\theta = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{\ddot{p}}{c^2 r}\sin\theta \tag{249}$$

$$B^\varphi = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\ddot{p}}{cr}\sin\theta \tag{250}$$

残りは無視できる。残りを落としてもよいことの正当性は，後に明らかとなる。

（ここでは，$cB^\varphi = E_\theta$ に注意。）

4.2.6　放射電磁波の強度

このときのエネルギーの流れを表すポインティングベクトルの向きは動径方向で，大きさは

$$\frac{1}{\mu_0}E_\theta B^\varphi = \frac{1}{16\pi^2\epsilon_0 c^3}\frac{|\ddot{p}|^2}{r^2}\sin^2\theta \tag{251}$$

である。

これを半径 r の球面上で積分すると，放射電磁波の電力となる。

$$\begin{aligned} W &= 2\pi\int_0^\pi \left(\frac{1}{16\pi^2\epsilon_0 c^3}\frac{|\ddot{p}|^2}{r^2}\sin^2\theta\right) r^2\sin\theta d\theta \\ &= \frac{|\ddot{p}|^2}{6\pi\epsilon_0 c^3} \end{aligned} \tag{252}$$

これは，r によらないから，無限遠まで到達する電磁波の寄与を表す。

さかのぼって考えれば，以前無視した部分は，無限遠まで影響を及ぼすことはない，ということである。

荷電粒子の加速度運動でも，同様に放射電磁波の強度が計算される。

双極子輻射とほぼ同じ形となり，

$$W(t) = \frac{q^2}{6\pi\epsilon_0 c^3}(\ddot{z}(t))^2 \tag{253}$$

となる。

ここで q は粒子の電荷，$\ddot{z}(t)$ は粒子の加速度である。

これを Larmor の公式という。

双極子放射の場合，

$$p = p\sin\omega t \tag{254}$$

のような振動だとすると，
時間平均をした放射電力は

$$\langle W\rangle = \frac{|p|^2\omega^4}{12\pi\epsilon_0 c^3} \tag{255}$$

となる。
放射電磁波の強度は振動数の 4 乗に比例する。

4.3 荷電粒子に働く減衰力

加速度運動をしている荷電粒子は，電磁波を放射するため，エネルギーを失う。
その効果は，運動方程式中に減衰力としてあらわれる。

減衰力の大きさを $K(t)$ とする。
Larmor の公式により

$$\int_{t_1}^{t_2} K(t)v(t)dt$$

$$= -\frac{q^2}{6\pi\epsilon_0 c^3}\int_{t_1}^{t_2}(\dot{v}(t))^2 dt \tag{256}$$

$$= -\frac{q^2}{6\pi\epsilon_0 c^3}\left\{[v\dot{v}]_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2}\ddot{v}v dt\right\} \tag{257}$$

最右辺第一項の寄与は，典型的な振動運動の場合，平均としては効いてこない。

したがって

$$K(t) = \frac{q^2}{6\pi\epsilon_0 c^3}\ddot{v}(t) \tag{258}$$

が減衰力の大きさである。
（加加速度に比例。）

5 電磁波の散乱

5.1 自由電子による散乱

入射電磁波を z 方向に進む平面波とする。

$$E_x = E_0 \sin(kz - \omega t) \tag{259}$$

この平面波のはこぶエネルギーの流れの大きさは

$$\begin{aligned} u_{in} &= |\mathbf{S}| \\ &= \frac{1}{\mu_0}|\mathbf{E}\times\mathbf{B}| \\ &= \frac{1}{\mu_0}\frac{1}{c}E_0^2\sin^2(kz-\omega t) \\ &= c\epsilon_0 E_0^2 \sin^2(kz-\omega t) \end{aligned} \tag{260}$$

したがってその時間平均は

$$\langle u_{in}\rangle = \frac{1}{2}c\epsilon_0 E_0^2 \tag{261}$$

（$z=0$ にある）自由電子の運動方程式は

$$m\ddot{x} = eE_0 \sin\omega t \tag{262}$$

自由電子の加速度運動は，双極子輻射と同様の放射を導く。

よって，十分遠方で，単位立体角あたりに散乱されるエネルギーの流れは

$$r^2 u = \frac{e^2}{16\pi^2\epsilon_0 c^3}\left(\frac{eE_0}{m}\right)^2 \sin^2\omega t \sin^2\theta \tag{263}$$

したがって

$$\langle r^2 u\rangle = \frac{e^2}{32\pi^2\epsilon_0 c^3}\left(\frac{eE_0}{m}\right)^2 \sin^2\theta \tag{264}$$

単位強度の入射当たりの，単位時間，単位立体角に散乱されるエネルギーの強さを散乱微分断面積 $\frac{d\sigma}{d\Omega}$ とする。

つまり

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} \equiv \frac{\langle r^2 u\rangle}{\langle u_{in}\rangle} = \frac{e^4}{16\pi^2\epsilon_0^2 m^2 c^4}\sin^2\theta \tag{265}$$

ここで，θ は x 軸からはかった角度であることに注意する。
z 軸からの角度を Θ とすると，x-z 平面上では

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{e^4}{16\pi^2\epsilon_0^2 m^2 c^4}\cos^2\Theta \tag{266}$$

y-z 平面上では

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{e^4}{16\pi^2\epsilon_0^2 m^2 c^4} \tag{267}$$

最初に考えたのは，x 方向に偏光した平面波であるから，偏光していない入射波の場合は（y 方向に偏光した平面波を加えて考えて），この平均となる。

結局，偏光のない平面波の自由電子による散乱微分断面積は

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_T = \left(\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 mc^2}\right)^2 \frac{1+\cos^2\Theta}{2} \tag{268}$$

これをトムソン散乱の微分断面積という。
（偏光のない平面波の自由電子による散乱をトムソン散乱という。）

ちなみに，

$$\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 mc^2} \tag{269}$$

のことを古典電子半径と呼ぶ。

5.2 弾性的に束縛された電子による散乱

入射波は平面波とする。
（$z=0$ にある）自由電子の運動方程式は

$$m\ddot{x} + m\omega_0^2 x = eE_0 \sin\omega t \tag{270}$$

したがって

$$x(t) = \frac{eE_0}{m(\omega_0^2-\omega^2)}\sin\omega t \tag{271}$$

$$\ddot{x}^2 = \left(\frac{eE_0\omega^2}{m(\omega_0^2-\omega^2)}\right)^2 \sin^2\omega t \tag{272}$$

したがって

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right) = \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_T \frac{\omega^4}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2} \tag{273}$$

$\omega << \omega_0$ の場合，つまり波長が長い場合は

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right) \propto \omega^4 \propto \frac{1}{\lambda^4} \tag{274}$$

ここで λ は光の波長。

このような長波長の光の散乱をレーリー散乱と呼ぶ。
レーリー散乱の断面積は，波長の逆数の 4 乗に比例する。

青い光の方が赤い光よりもよく散乱されるため，空は青く，夕日は赤く見える！

付録

極座標でのベクトル解析

$\mathbf{e}_r$，$\mathbf{e}_\theta$，$\mathbf{e}_\varphi$ は r，θ，φ 各方向の単位ベクトル。

$$\nabla\phi = \frac{\partial\phi}{\partial r}\mathbf{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial\phi}{\partial\theta}\mathbf{e}_\theta + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial\phi}{\partial\varphi}\mathbf{e}_\varphi \tag{275}$$

$$\nabla\cdot\mathbf{A} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 A_r\right) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta A_\theta\right) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial A_\varphi}{\partial\varphi} \tag{276}$$

$$\begin{aligned}\nabla\times\mathbf{A} &= \frac{1}{r\sin\theta}\left\{\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta A_\varphi\right) - \frac{\partial A_\theta}{\partial\varphi}\right\}\mathbf{e}_r \\ &+ \frac{1}{r}\left\{\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial A_r}{\partial\varphi} - \frac{\partial}{\partial r}\left(rA_\varphi\right)\right\}\mathbf{e}_\theta \\ &+ \frac{1}{r}\left\{\frac{\partial}{\partial r}\left(rA_\theta\right) - \frac{\partial A_r}{\partial\theta}\right\}\mathbf{e}_\varphi\end{aligned} \tag{277}$$

$$\nabla^2\phi = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\phi}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial\phi}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2\phi}{\partial\varphi^2} \tag{278}$$