曲率を計算する

白石　清（山口大学理学部）

1998年12月07日

概 要

多脚場を使って，曲率を計算する。簡略化のため，説明の論理は穴だらけかも知れないので，頭から信じ込まないよーに。

1　多脚場を導入

　計量を次のように書く。

$$g_{\mu\nu} = e^a_\mu e_{a\nu} = \eta_{ab} e^a_\mu e^b_\nu \tag{1}$$

ここで $\eta_{ab} = diag.(-1,1,1,1)$ などとする。（何次元でもよい）

　e^a_μ を多脚場 (vielbein) と呼ぶ。四次元のときは，四脚場 (vierbein)。

　多脚場に対する共変微分を，以下のようにする。

$$\nabla_\nu e^a_\mu = \partial_\nu e^a_\mu + \omega^a_{\nu b} e^b_\mu - \Gamma^\lambda_{\nu\mu} e^a_\lambda \tag{2}$$

　また，

$$\nabla_\nu \eta_{ab} = 0 \tag{3}$$

とする。

　このとき

$$\begin{aligned}
\nabla_\lambda g_{\mu\nu} &= \nabla_\lambda (e^a_\mu e_{a\nu}) \\
&= \partial_\lambda (e^a_\mu e_{a\nu}) - \Gamma^\rho_{\lambda\mu} e^a_\rho e_{a\nu} - \Gamma^\rho_{\lambda\nu} e^a_\mu e_{a\rho} \\
&= (\nabla_\lambda e^a_\mu) e_{a\nu} + e^a_\mu \nabla_\lambda e_{a\nu} - (\omega^{ab}_\lambda + \omega^{ba}_\lambda) e_{a\mu} e_{b\nu}
\end{aligned} \tag{4}$$

となるから，

$$\nabla_\lambda g_{\mu\nu} \Longleftrightarrow \nabla_\lambda e^a_\mu = 0 \quad and \quad \omega^{ab}_\lambda = -\omega^{ba}_\lambda \tag{5}$$

がわかる。

　Γ を消去して，e と ω の関係を求める。そのために，$\nabla_\nu e^a_\mu = 0$ より，

$$\nabla_\nu e^a_\mu - \nabla_\mu e^a_\nu = 0 \tag{6}$$

を考える。上の式から

$$\partial_\nu e^a_\mu + \omega^a_{\nu b} e^b_\mu - (\nu \leftrightarrow \mu) = 0 \tag{7}$$

　このような反対称の式は，微分形式を使うと，簡単に表される。

$$e^a \equiv e^a_\mu dx^\mu, \qquad \omega^{ab} \equiv \omega^{ab}_\mu dx^\mu \tag{8}$$

を定義し，

$$dx^\mu \wedge dx^\nu = -dx^\nu \wedge dx^\mu \tag{9}$$

および

$$ddx^\mu = 0, \qquad de^a = \partial_\nu e^a_\mu dx^\nu \wedge dx^\mu \tag{10}$$

などから，

$$\nabla_\nu e^a_\mu - \nabla_\mu e^a_\nu = 0 \Longleftrightarrow de^a + \omega^a{}_b \wedge e^b = 0 \tag{11}$$

を得る。ただし $\omega^{ab} = -\omega^{ba}$。

2　曲率

$$
\begin{aligned}
& [\nabla_\rho, \nabla_\sigma]\, e^a_\mu \\
= & \left(\partial_\rho \omega_\sigma{}^a{}_b + \omega_\rho{}^a{}_c \omega_\sigma{}^c{}_b\right) e^b_\mu - \left(\partial_\rho \Gamma^\lambda_{\sigma\mu} - \Gamma^\tau_{\rho\mu}\Gamma^\lambda_{\sigma\tau}\right) e^a_\lambda \\
- & (\rho \leftrightarrow \sigma) \\
= & \left(\partial_\rho \omega_\sigma{}^a{}_b - \partial_\sigma \omega_\rho{}^a{}_b + \omega_\rho{}^a{}_c \omega_\sigma{}^c{}_b - \omega_\sigma{}^a{}_c \omega_\rho{}^c{}_b\right) e^b_\mu \\
- & \left(\partial_\rho \Gamma^\lambda_{\sigma\mu} - \partial_\sigma \Gamma^\lambda_{\rho\mu} + \Gamma^\tau_{\sigma\mu}\Gamma^\lambda_{\rho\tau} - \Gamma^\tau_{\rho\mu}\Gamma^\lambda_{\sigma\tau}\right) e^a_\lambda
\end{aligned} \tag{12}
$$

なので，$[\nabla_\rho, \nabla_\sigma]\, e^a_\mu = 0$ より

$$
\begin{aligned}
& \partial_\rho \omega_\sigma{}^a{}_b - \partial_\sigma \omega_\rho{}^a{}_b + \omega_\rho{}^a{}_c \omega_\sigma{}^c{}_b - \omega_\sigma{}^a{}_c \omega_\rho{}^c{}_b \\
= & e^a_\mu e_{b\nu} R^{\mu\nu}{}_{\rho\sigma} = R^a{}_{b\rho\sigma}
\end{aligned} \tag{13}
$$

ただし

$$
R^\lambda{}_{\mu\rho\sigma} = \partial_\rho \Gamma^\lambda_{\sigma\mu} - \partial_\sigma \Gamma^\lambda_{\rho\mu} + \Gamma^\tau_{\sigma\mu}\Gamma^\lambda_{\rho\tau} - \Gamma^\tau_{\rho\mu}\Gamma^\lambda_{\sigma\tau}, \tag{14}
$$

これはリーマン曲率テンソル。

結局，e から ω を求め，ω から曲率を計算できる。微分形式では，

$$
\begin{aligned}
\Theta^a{}_b &= d\omega^a{}_b + \omega^a{}_c \wedge \omega^c{}_b \\
&= \frac{1}{2} R^a{}_{b\rho\sigma} dx^\rho \wedge dx^\sigma
\end{aligned} \tag{15}
$$

が curvature 2-form と呼ばれるものである。

まとめ

$$
\boxed{\begin{array}{c} de^a + \omega^a{}_b \wedge e^b = 0 \\ \Theta^a{}_b = d\omega^a{}_b + \omega^a{}_c \wedge \omega^c{}_b \end{array}}
$$

3　曲率の計算例

3.1　Robertson-Walker metric

宇宙論のモデルとして，一様等方な空間がよく用いられる。

$$
ds^2 = -dt^2 + a^2(t) d\Omega_N^2 \tag{16}
$$

この場合，

$$
e^0 = dt, \qquad e^A = a(t)\tilde{e}^A \tag{17}
$$

ただし

$$d\tilde{e}^A + \tilde{\omega}^A{}_B \wedge \tilde{e}^B = 0, \tag{18}$$

$A = 1, ..., N$ とする。さらに，N 次元空間が最大の対称性をもっているとすると，curvature 2-form は次のように書ける。

$$\tilde{\Theta}^A{}_B = d\tilde{\omega}^A{}_B + \tilde{\omega}^A{}_C \wedge \tilde{\omega}^C{}_B = k\tilde{e}^A \wedge \tilde{e}^B, \tag{19}$$

ここで k は定数。$k = 1, 0, -1$ のいづれかに規格化できる。

e の外微分から

$$\begin{aligned} de^0 &= 0, \qquad (20) \\ de^A &= \dot{a}dt \wedge \tilde{e}^A + ad\tilde{e}^A \\ &= \frac{\dot{a}}{a}e^0 \wedge e^A - \tilde{\omega}^A{}_B \wedge e^B, \qquad (21) \end{aligned}$$

なので，

$$\omega^A{}_0 = \frac{\dot{a}}{a}e^A, \quad \omega^A{}_B = \tilde{\omega}^A{}_B \tag{22}$$

曲率 2-form はこのとき

$$\begin{aligned} \Theta^0{}_A &= d\omega^0{}_A + \omega^0{}_B \wedge \omega^B{}_A \\ &= d\left(\frac{\dot{a}}{a}e^A\right) + \frac{\dot{a}}{a}e^B \wedge \tilde{\omega}^B{}_A \\ &= \left[\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^{\cdot} + \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2\right] e^0 \wedge e^A \\ &= \frac{\ddot{a}}{a}e^0 \wedge e^A, \end{aligned} \tag{23}$$

$$\begin{aligned} \Theta^A{}_B &= d\omega^A{}_B + \omega^A{}_C \wedge \omega^C{}_B + \omega^A{}_0 \wedge \omega^0{}_B \\ &= \tilde{\Theta}^A{}_B + \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 e^A \wedge e^B \\ &= \frac{\dot{a}^2 + k}{a^2} e^A \wedge e^B. \end{aligned} \tag{24}$$