Riemann tensor の対称性

1999 年 07 月 07 日改訂

概 要

1 Riemann tensor の対称性

Riemann tensor:

$$R^{\mu}{}_{\sigma\beta\alpha} = \partial_\beta \Gamma^{\mu}_{\sigma\alpha} - \partial_\alpha \Gamma^{\mu}_{\sigma\beta} + \Gamma^{\mu}_{\rho\beta}\Gamma^{\rho}_{\sigma\alpha} - \Gamma^{\mu}_{\rho\alpha}\Gamma^{\rho}_{\sigma\beta} \tag{1}$$

ここで

$$\Gamma^{\sigma}_{\mu\nu} = \frac{1}{2} g^{\rho\sigma} \left(\partial_\mu g_{\nu\rho} + \partial_\nu g_{\mu\rho} - \partial_\rho g_{\nu\mu} \right) \tag{2}$$

自由落下座標系（局所慣性系）では，$\Gamma^{\sigma}_{\mu\nu}$ の全ての成分がゼロになる。

$$\nabla_\sigma g_{\mu\nu} \equiv 0 \tag{3}$$

より

$$\Gamma^{\sigma}_{\mu\nu} = 0 \Leftrightarrow \partial_\sigma g_{\mu\nu} = 0 \tag{4}$$

つねに自由落下座標系を局所的にとることができる。
また，局所的に

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} \tag{5}$$

とすることができる。

この座標系で Riemann tensor （第一指標を下げたもの）は

$$\begin{aligned}
R_{\lambda\sigma\beta\alpha} &= g_{\lambda\mu}R^{\mu}_{\sigma\beta\alpha} \\
&= g_{\lambda\mu}\partial_\beta\Gamma^{\mu}_{\sigma\alpha} - g_{\lambda\mu}\partial_\alpha\Gamma^{\mu}_{\sigma\beta} \\
&= \frac{1}{2}\partial_\beta\left(\partial_\sigma g_{\alpha\lambda} + \partial_\alpha g_{\sigma\lambda} - \partial_\lambda g_{\alpha\sigma}\right) - \frac{1}{2}\partial_\alpha\left(\partial_\sigma g_{\beta\lambda} + \partial_\beta g_{\sigma\lambda} - \partial_\lambda g_{\beta\sigma}\right) \\
&= -\frac{1}{2}\left(\partial_\lambda\partial_\beta g_{\alpha\sigma} - \partial_\lambda\partial_\alpha g_{\beta\sigma} + \partial_\sigma\partial_\alpha g_{\lambda\beta} - \partial_\sigma\partial_\beta g_{\lambda\alpha}\right) \qquad (6)
\end{aligned}$$

この表式で以下の対称性は明らか。

$$R_{\alpha\beta\gamma\delta} = R_{\gamma\delta\alpha\beta} \qquad (7)$$

$$R_{\alpha\beta\gamma\delta} = -R_{\beta\alpha\gamma\delta} = -R_{\alpha\beta\delta\gamma} \qquad (8)$$

$$R_{\alpha\beta\gamma\delta} + R_{\alpha\delta\beta\gamma} + R_{\alpha\gamma\delta\beta} = 0 \qquad (9)$$

$R_{\alpha\beta\gamma\delta}$ はテンソルなので，この対称性は一般の座標系において成り立つ。

exercise

恒等式

$$\left[\nabla_\lambda, \left[\nabla_\mu, \nabla_\nu\right]\right]\phi + \left[\nabla_\nu, \left[\nabla_\lambda, \nabla_\mu\right]\right]\phi + \left[\nabla_\mu, \left[\nabla_\nu, \nabla_\lambda\right]\right]\phi = 0 \quad (10)$$

から，(9) を導け。

exercise

ある点 X_0^μ で局所慣性系をとる。このときその近傍 $X_0^\mu + \xi^\mu$ での計量は

$$g_{\mu\nu}(X_0^\mu + \xi^\mu) = \eta_{\mu\nu} - \frac{1}{3}R_{\mu\lambda\nu\sigma}(X_0^\mu)\xi^\lambda\xi^\sigma + O(\xi^3) \qquad (11)$$

となる。これを確かめよ。

2 Bianchi identity

Bianchi identity:

$$\nabla_\lambda R_{\alpha\beta\mu\nu} + \nabla_\nu R_{\alpha\beta\lambda\mu} + \nabla_\mu R_{\alpha\beta\nu\lambda} = 0 \tag{12}$$

この恒等式も，自由落下座標系において具体的に示すことができる。

<u>exercise</u>

恒等式

$$[\nabla_\lambda, [\nabla_\mu, \nabla_\nu]]\, A^\alpha + [\nabla_\nu, [\nabla_\lambda, \nabla_\mu]]\, A^\alpha + [\nabla_\mu, [\nabla_\nu, \nabla_\lambda]]\, A^\alpha = 0 \tag{13}$$

および (9) から，(12) を導け。

3 divergence-free tensor

Bianchi identity において，$g^{\alpha\mu}$ をかけて縮約をとると

$$\nabla_\lambda R_{\beta\nu} - \nabla_\nu R_{\beta\lambda} + \nabla_\mu R^\mu{}_{\beta\nu\lambda} = 0 \tag{14}$$

ここで

$$R_{\beta\delta} \equiv g^{\alpha\gamma} R_{\alpha\beta\gamma\delta} \tag{15}$$

は Ricci tensor。

さらに，$g^{\beta\nu}$ をかけて縮約をとると

$$\nabla_\lambda R - \nabla_\nu R^\nu{}_\lambda - \nabla_\mu R^\mu{}_\lambda = 0 \tag{16}$$

すなわち

$$\nabla_\lambda R - 2\nabla_\mu R^\mu{}_\lambda = 0 \tag{17}$$

ここで

$$R \equiv g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} \tag{18}$$

はスカラー曲率。

書き換えると

$$\nabla_\mu \left(R^\mu{}_\lambda - \frac{1}{2}\delta^\mu_\lambda R \right) = 0 \tag{19}$$

あるいは

$$\nabla_\mu \left(R^{\mu\nu} - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} R \right) = 0 \tag{20}$$

Einstein tensor $G_{\mu\nu}$ を次のように定義する。

$$G_{\mu\nu} \equiv R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R \tag{21}$$

このとき

$$\nabla_\mu G^{\mu\nu} = 0 \tag{22}$$

を満たすことがわかる。

4 Riemann tensor の独立な成分

4.1 Riemann tensor の独立な成分の数：四次元の場合

四次元の場合，地道に数えてみる。

$R_{\alpha\beta\gamma\delta}$ において，α と β は反対称なので，α と β の組のとりうる場合の数は，

$$\frac{4 \times 3}{2} = 6 \tag{23}$$

γ と δ の組についても同様で，6 通り。

$R_{\alpha\beta\gamma\delta}$ を $R_{(\alpha\beta)(\gamma\delta)}$ とみると，$(\alpha\beta)$ と $(\gamma\delta)$ について対称なので，可能な場合の数は

$$\frac{6 \times 7}{2} = 21 \tag{24}$$

これでおわりか？まだまだ。

ここまでで可能な指標は

$$\begin{aligned} (\alpha\beta\gamma\delta) &= (0101), (0102), (0103), (0112), (0113), (0123), \\ & \quad (0202), (0203), (0212), (0213), (0223), (0303), \\ & \quad (0312), (0313), (0323), (1212), (1213), (1223), \\ & \quad (1313), (1323), (2323) \end{aligned} \tag{25}$$

の 21 個であるが，このうち

$$R_{0123} - R_{0213} + R_{0312} = 0 \tag{26}$$

なので，一つは独立ではない（また，これ以外には従属関係はない）。

したがって，四次元の場合，Riemann tensor の独立な成分の数は 20 個である。

4.2 Riemann tensor の独立な成分の数：D 次元の場合

効率よく数えよう。

条件 (8) だけからは，可能な数は

$$\frac{D(D-1)}{2} \times \frac{D(D-1)}{2} = \frac{D^2(D-1)^2}{4} \tag{27}$$

だけある。
条件式 (9) の数は，

$$D \times \frac{D(D-1)(D-2)}{3!} = \frac{D^2(D-1)(D-2)}{6} \tag{28}$$

個ある。したがって，独立な成分の個数は

$$\frac{D^2(D-1)^2}{4} - \frac{D^2(D-1)(D-2)}{6} = \frac{D^2(D^2-1)}{12} \tag{29}$$

である。

実は，性質 (7) は (8) と (9) から導くことができる。

<u>exercise</u>

このことを示せ。

結局，D 次元においては，Riemann tensor の独立成分の個数は

$$\frac{D^2(D^2-1)}{12} \tag{30}$$

である。

5　2次元におけるRiemann tensor

$\mu, \nu = 1, 2$ とする。

2次元において独立な Riemann tensor の成分は

$$R_{1212} \tag{31}$$

だけである。

Ricci tensor の成分は

$$\begin{aligned} R_{11} &= g^{22} R_{2121} = g^{22} R_{1212} \\ R_{22} &= g^{11} R_{1212} \\ R_{12} &= R_{21} \\ &= g^{21} R_{2112} = -g^{12} R_{1212} \end{aligned} \tag{32}$$

スカラー曲率は

$$\begin{aligned} R &= g^{11} R_{11} + g^{22} R_{22} + 2 g^{12} R_{12} \\ &= 2 g^{11} g^{22} R_{1212} - 2 g^{12} g^{12} R_{1212} \\ &= 2 \left(g^{11} g^{22} - g^{12} g^{12} \right) R_{1212} \end{aligned} \tag{33}$$

ところで

$$\begin{aligned} g^{11} &= \frac{1}{g} g_{22} \\ g^{22} &= \frac{1}{g} g_{11} \\ g^{12} &= -\frac{1}{g} g_{12} \end{aligned} \tag{34}$$

ここで

$$g = g_{11} g_{22} - g_{12} g_{12} \tag{35}$$

なので

$$\begin{aligned} R_{11} &= \frac{1}{g} g_{11} R_{1212} \\ R_{22} &= \frac{1}{g} g_{22} R_{1212} \\ R_{12} &= \frac{1}{g} g_{12} R_{1212} \end{aligned} \tag{36}$$

また

$$g^{11}g^{22} - g^{12}g^{12} = \frac{1}{g} \tag{37}$$

なので

$$R = \frac{2}{g}R_{1212} \tag{38}$$

以上のことから

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = 0 \tag{39}$$

$$R_{\mu\nu\rho\sigma} = \frac{1}{2}R\left(g_{\mu\rho}g_{\nu\sigma} - g_{\mu\sigma}g_{\nu\rho}\right) \tag{40}$$

6　3次元におけるRiemann tensor

$\mu, \nu = 1, 2, 3$ とする。

3次元において独立な Riemann tensor の成分は

$$R_{1212},\quad R_{1223},\quad R_{1231},\quad R_{2323},\quad R_{2331},\quad R_{3131} \tag{41}$$

の 6 個である。

独立な Ricci tensor の成分は

$$\begin{aligned}
R_{11} &= g^{22}R_{2121} + g^{33}R_{3131} + g^{23}R_{2131} + g^{32}R_{3121} \\
&= g^{22}R_{1212} + g^{33}R_{3131} - 2g^{23}R_{1231} \\
R_{22} &= g^{11}R_{1212} + g^{33}R_{3232} + g^{31}R_{3212} + g^{13}R_{1232} \\
&= g^{11}R_{1212} + g^{33}R_{2323} - 2g^{31}R_{1223} \\
R_{33} &= g^{11}R_{1313} + g^{22}R_{2323} + g^{12}R_{1323} + g^{21}R_{2313} \\
&= g^{11}R_{3131} + g^{22}R_{2323} - 2g^{12}R_{2331} \\
R_{12} &= g^{21}R_{2112} + g^{23}R_{2132} + g^{31}R_{3112} + g^{33}R_{3132} \\
&= -g^{12}R_{1212} + g^{23}R_{1223} + g^{13}R_{1231} - g^{33}R_{2331} \\
R_{23} &= g^{12}R_{1223} + g^{11}R_{1213} + g^{32}R_{3223} + g^{31}R_{3213} \\
&= g^{12}R_{1223} - g^{11}R_{1231} - g^{23}R_{2323} + g^{13}R_{2331} \\
R_{31} &= g^{22}R_{2321} + g^{12}R_{1321} + g^{13}R_{1331} + g^{23}R_{2331} \\
&= -g^{22}R_{1223} + g^{12}R_{1231} - g^{13}R_{3131} + g^{23}R_{2331}
\end{aligned} \tag{42}$$

自由落下座標系（局所慣性系）を用いる。さらに，$g_{\mu\nu}(P) = \delta_{\mu\nu}$ とする。

$$\begin{pmatrix} R_{11} \\ R_{22} \\ R_{33} \\ R_{12} \\ R_{23} \\ R_{31} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R_{2323} \\ R_{3131} \\ R_{1212} \\ R_{2331} \\ R_{3112} \\ R_{1223} \end{pmatrix} \tag{43}$$

$$\begin{pmatrix} R_{2323} \\ R_{3131} \\ R_{1212} \\ R_{2331} \\ R_{3112} \\ R_{1223} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R_{11} \\ R_{22} \\ R_{33} \\ R_{12} \\ R_{23} \\ R_{31} \end{pmatrix} \tag{44}$$

このことから，次のことがわかるか？

$$\begin{aligned} R_{\alpha\beta\gamma\delta} &= R_{\alpha\gamma} g_{\beta\delta} + R_{\beta\delta} g_{\alpha\gamma} - R_{\alpha\delta} g_{\beta\gamma} - R_{\beta\gamma} g_{\alpha\delta} \\ &- \frac{1}{2} R \left(g_{\alpha\gamma} g_{\beta\delta} - g_{\alpha\delta} g_{\beta\gamma} \right) \end{aligned} \tag{45}$$

参考文献

[1] 佐々木節　一般相対論　産業図書