Particle Physicists' View of Gravity

Kiyoshi Shiraishi

平成 26 年 6 月 5 日

概 要

2009 年度博士後期課程用の講義メモです。参考文献の他，関係者の講演素材などを参考に（パクリ）しています，ので，個人的使用に止めてくださいね。

目 次

1 Introduction

重力，相対論，量子論，それぞれの固有の定数，G（ニュートン定数），c（光速），$\hbar$（プランク定数）を組み合わせてできる特徴ある量は以下の３つ。

$$\ell_P = \sqrt{\frac{\hbar G}{c^3}} \approx 1.62 \times 10^{-33} \text{ cm} \tag{1}$$

$$t_P = \frac{\ell_P}{c} = \sqrt{\frac{\hbar G}{c^5}} \approx 5.40 \times 10^{-44} \text{ s} \tag{2}$$

$$m_P = \frac{\hbar}{\ell_P c} = \sqrt{\frac{\hbar c}{G}} \approx 2.17 \times 10^{-5} \text{ g} \approx 1.22 \times 10^{19} \text{ GeV} \tag{3}$$

これらは，重力の量子論が支配的となるスケールを表している，と考えられる。[1]

さて，このメモでは，特に書かない限り，$\hbar = c = 1$ とする自然単位系を用いている。

> ついでにホーキング輻射について（以下では議論しないが !: たぶん来年の講義で扱う[2]）。質量 M の回転しないブラックホールは次の温度に対応する輻射を出す：
>
> $$T_H = \frac{\hbar c^3}{8\pi k_B G M} \approx 6.17 \times 10^{-8} \left(\frac{M_\odot}{M}\right) \text{ K} \tag{4}$$
>
> これがホーキング温度。加速度系でも同様（等価原理！）なので，加速度 a の系は次のような Unruh 温度を持つ。
>
> $$T_U = \frac{\hbar a}{2\pi k_B c} \approx 4.05 \times 10^{-23} a \left[\frac{\text{cm}}{\text{s}^2}\right] \text{ K} \tag{5}$$
>
> これらも自然定数と系を特徴づける少数の典型的量から作られるものとして，次元解析の「頻出例題」ですね。

さて，ここでは，素粒子論的あるいは場の理論の視点から一般相対論を眺めてみよう。[3]

読者は一般相対論の基礎は修得していることを想定されている。

なお，今回は近年の素粒子論の最大の特徴？であるところの超対称性はいっさい含まない。

ときどき，metric signature が変わる。アクションの符号も場当たり的であることに注意。

---

[1]そういえば大学一年生の講義では必ず次元解析を扱いますね。その例題ですね。

[2]来年は背景場の理論，曲がった時空の量子論，カシミア効果，カルツァクラインと超対称性，などの予定（？）

[3]全然イントロになってない。

2 Curvatures

2.1 curvature tensors

時空の曲率を表すテンソルには，以下のものがある。

Riemann tensor:

$$R^{\mu}{}_{\sigma\beta\alpha} = \partial_\beta \Gamma^\mu_{\sigma\alpha} - \partial_\alpha \Gamma^\mu_{\sigma\beta} + \Gamma^\mu_{\rho\beta}\Gamma^\rho_{\sigma\alpha} - \Gamma^\mu_{\rho\alpha}\Gamma^\rho_{\sigma\beta}\,, \tag{6}$$

ここでクリストッフェル記号

$$\Gamma^\sigma_{\mu\nu} = \frac{1}{2} g^{\rho\sigma}\left(\partial_\mu g_{\nu\rho} + \partial_\nu g_{\mu\rho} - \partial_\rho g_{\nu\mu}\right)\,. \tag{7}$$

であり，計量テンソル $g_{\mu\nu}$ の逆 $g^{\mu\nu}$ は次を満たすものとする:$g^{\mu\rho}g_{\rho\nu} = \delta^\mu_\nu$。

ここで

$$\Gamma^\sigma_{\mu\nu} = \Gamma^\sigma_{\nu\mu} \tag{8}$$

に注意する（もちろん $g_{\mu\nu} = g_{\nu\mu}$)。

Ricci tensor:

$$R_{\sigma\alpha} = R^{\beta}{}_{\sigma\beta\alpha}\,. \tag{9}$$

Scalar curvature:

$$R = g^{\sigma\alpha} R_{\sigma\alpha}\,. \tag{10}$$

このように，つぎつぎ縮約をして，独立要素（自由度）の少ないものを作っている。

2.2 Einstein equation

アインシュタイン方程式は次のように書ける。

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = \frac{\kappa^2}{4} T_{\mu\nu}\,, \tag{11}$$

または

$$R_{\mu\nu} = \frac{\kappa^2}{4}\left(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} T\right)\,. \tag{12}$$

(ただし後者は４次元時空の場合)。[4]

ここで $\kappa^2 = 32\pi G$ また $T \equiv T^\rho_\rho = g^{\rho\sigma}T_{\rho\sigma}$ とした。

真空におけるアインシュタイン方程式を導く Einstein-Hilbert action は

$$S_{EH} = \frac{2}{\kappa^2}\int d^4x \sqrt{-g}\, R \tag{13}$$

である。変分を見てみると

$$\delta S_{EH} = \frac{2}{\kappa^2}\int d^4x \left[(\delta\sqrt{-g})R + \sqrt{-g}(\delta g^{\mu\nu})R_{\mu\nu} + \sqrt{-g}g^{\mu\nu}(\delta R_{\mu\nu})\right] \tag{14}$$

である。

ここに現れるものはまず

$$\delta\sqrt{-g} = \frac{1}{2} g^{\mu\nu}\delta g_{\mu\nu} \qquad {}^{5} \tag{15}$$

[4]他の次元ではどうなる？

[5] $\delta \ln\det A = (\det A)^{-1}\delta\det A = \delta \mathrm{Tr}\ln A = \mathrm{Tr}A^{-1}\delta A$

であり，そして

$$\delta g^{\mu\nu} = -g^{\mu\rho} g^{\nu\sigma} \delta g_{\rho\sigma} \qquad [6] \tag{16}$$

である。

一方，

$$R_{\sigma\alpha} = \partial_\beta \Gamma^\beta_{\sigma\alpha} - \partial_\alpha \Gamma^\beta_{\sigma\beta} + \Gamma^\beta_{\rho\beta}\Gamma^\rho_{\sigma\alpha} - \Gamma^\beta_{\rho\alpha}\Gamma^\rho_{\sigma\beta}\,, \tag{17}$$

なので，次のことがわかる：

$$\begin{aligned}
\delta R_{\sigma\alpha} &= \partial_\beta \delta\Gamma^\beta_{\sigma\alpha} - \partial_\alpha \delta\Gamma^\beta_{\sigma\beta} + \delta\Gamma^\beta_{\rho\beta}\Gamma^\rho_{\sigma\alpha} + \Gamma^\beta_{\rho\beta}\delta\Gamma^\rho_{\sigma\alpha} \\
&\quad - \delta\Gamma^\beta_{\rho\alpha}\Gamma^\rho_{\sigma\beta} - \Gamma^\beta_{\rho\alpha}\delta\Gamma^\rho_{\sigma\beta} \\
&= (\partial_\beta \delta\Gamma^\beta_{\sigma\alpha} + \Gamma^\beta_{\rho\beta}\delta\Gamma^\rho_{\sigma\alpha} - \Gamma^\rho_{\sigma\beta}\delta\Gamma^\beta_{\rho\alpha} - \Gamma^\rho_{\beta\alpha}\delta\Gamma^\beta_{\sigma\rho}) \\
&\quad - (\partial_\alpha \delta\Gamma^\beta_{\sigma\beta} + \Gamma^\beta_{\rho\alpha}\delta\Gamma^\rho_{\sigma\beta} - \Gamma^\rho_{\sigma\alpha}\delta\Gamma^\beta_{\rho\beta} - \Gamma^\rho_{\beta\alpha}\delta\Gamma^\beta_{\sigma\rho}) \\
&= \nabla_\beta \delta\Gamma^\beta_{\sigma\alpha} - \nabla_\alpha \delta\Gamma^\beta_{\sigma\beta}\,.
\end{aligned} \tag{18}$$

Γ はテンソルではないが， $\delta\Gamma$ はテンソルであることに注意しよう。

以上を代入して

$$\delta S_{EH} = -\frac{2}{\kappa^2}\int d^4x\sqrt{-g}\left(R^{\mu\nu} - \frac{1}{2}g^{\mu\nu}R\right)\delta g_{\mu\nu} \tag{19}$$

となることがわかる。

$$\delta\Gamma^\beta_{\sigma\alpha} = \frac{1}{2}g^{\beta\rho}(\nabla_\sigma\delta g_{\rho\alpha} + \nabla_\alpha\delta g_{\rho\sigma} - \nabla_\rho\delta g_{\sigma\alpha}) \tag{20}$$

なので

$$\delta(\sqrt{-g}R) = \sqrt{-g}\left(-R^{\mu\nu} + \frac{1}{2}g^{\mu\nu}R + \nabla^\mu\nabla^\nu - g^{\mu\nu}\nabla^\rho\nabla_\rho\right)\delta g_{\mu\nu} \tag{21}$$

である。ブランス-ディッケ理論などで使用するものである。

2.3 symmetry among indices

リーマンテンソルの指標についての取り替えの対称性を見てみる。

まず明らかに最後の２つの指標について反対称。

$$R^\mu{}_{\sigma\beta\alpha} = -R^\mu{}_{\sigma\alpha\beta}\,. \tag{22}$$

他の対称性は，局所慣性系を考えることにより，見出すことができる。局所慣性系とはすなわち，直線座標系という訳なので

$$\Gamma^\sigma_{\mu\nu} = 0 \Leftrightarrow \partial_\sigma g_{\mu\nu} = 0\,, \tag{23}$$

となる座標系が時空のある一点においては選べるということ（等価原理！）である。注意すべきは，計量テンソルの２階微分はゼロにはできない $\partial_\rho\partial_\sigma g_{\mu\nu} \neq 0$ という点。

なのでそんな慣性座標系では Riemann tensor は次の形に帰着する。

$$\begin{aligned}
R_{\lambda\sigma\beta\alpha} &= g_{\lambda\mu}R^\mu{}_{\sigma\beta\alpha} \\
&= g_{\lambda\mu}\partial_\beta\Gamma^\mu_{\sigma\alpha} - g_{\lambda\mu}\partial_\alpha\Gamma^\mu_{\sigma\beta} \\
&= \frac{1}{2}\partial_\beta\left(\partial_\sigma g_{\alpha\lambda} + \partial_\alpha g_{\sigma\lambda} - \partial_\lambda g_{\alpha\sigma}\right) - \frac{1}{2}\partial_\alpha\left(\partial_\sigma g_{\beta\lambda} + \partial_\beta g_{\sigma\lambda} - \partial_\lambda g_{\beta\sigma}\right) \\
&= -\frac{1}{2}\left(\partial_\lambda\partial_\beta g_{\alpha\sigma} - \partial_\lambda\partial_\alpha g_{\beta\sigma} + \partial_\sigma\partial_\alpha g_{\lambda\beta} - \partial_\sigma\partial_\beta g_{\lambda\alpha}\right)\,.
\end{aligned} \tag{24}$$

[6] $\delta A^{-1} = -A^{-1}\,\delta A\,A^{-1}$

この表式から，以下のような指標に関する対称性が見つけられる。

$$R_{\alpha\beta\gamma\delta} = R_{\gamma\delta\alpha\beta} \tag{25}$$

$$R_{\alpha\beta\gamma\delta} = -R_{\beta\alpha\gamma\delta} = -R_{\alpha\beta\delta\gamma} \tag{26}$$

$$R_{\alpha\beta\gamma\delta} + R_{\alpha\delta\beta\gamma} + R_{\alpha\gamma\delta\beta} = 0 \tag{27}$$

$R_{\alpha\beta\gamma\delta}$ はテンソルなので，この対称性はあらゆる座標系でも同様に成立している。

exercise
恒等式（identity）

$$[\nabla_\lambda, [\nabla_\mu, \nabla_\nu]]\,\phi + [\nabla_\nu, [\nabla_\lambda, \nabla_\mu]]\,\phi + [\nabla_\mu, [\nabla_\nu, \nabla_\lambda]]\,\phi \equiv 0 \tag{28}$$

は (27) を導くことを示せ。

exercise
点 X_0^μ において，慣性座標系を考える。そのときその近傍の点 $X_0^\mu + \xi^\mu$ では計量テンソルは

$$g_{\mu\nu}(X_0^\mu + \xi^\mu) = \eta_{\mu\nu} - \frac{1}{3} R_{\mu\lambda\nu\sigma}(X_0^\mu)\xi^\lambda\xi^\sigma + O(\xi^3) \tag{29}$$

となることを示せ。

2.4 Bianchi identity

ビアンキ恒等式[7]

$$\nabla_\lambda R_{\alpha\beta\mu\nu} + \nabla_\nu R_{\alpha\beta\lambda\mu} + \nabla_\mu R_{\alpha\beta\nu\lambda} = 0 \tag{30}$$

は，局所慣性座標で簡単に示すことができる。

exercise
恒等式

$$[\nabla_\lambda, [\nabla_\mu, \nabla_\nu]]\,A^\alpha + [\nabla_\nu, [\nabla_\lambda, \nabla_\mu]]\,A^\alpha + [\nabla_\mu, [\nabla_\nu, \nabla_\lambda]]\,A^\alpha \equiv 0 \tag{31}$$

と (27) から (30) を導け。

2.5 divergence-free tensor

ビアンキ恒等式から

$$\nabla_\lambda R_{\beta\nu} - \nabla_\nu R_{\beta\lambda} + \nabla_\mu R^\mu{}_{\beta\nu\lambda} = 0\,, \tag{32}$$

が得られ，さらに

$$\nabla_\lambda R - \nabla_\nu R^\nu{}_\lambda - \nabla_\mu R^\mu{}_\lambda = 0 \tag{33}$$

または

$$\nabla_\lambda R - 2\nabla_\mu R^\mu{}_\lambda = 0 \tag{34}$$

[7]「びあんき」を変換したら「微暗記」となった件（実話）。

がわかるので

$$\nabla_\mu \left(R^{\mu\nu} - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} R \right) = 0 \tag{35}$$

である。

Einstein tensor $G_{\mu\nu}$ を

$$G_{\mu\nu} \equiv R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R \tag{36}$$

のように定義すれば

$$\nabla_\mu G^{\mu\nu} = 0 \tag{37}$$

となっている。

2.6 number of independent elements of Riemann tensor

2.6.1 four dimensions

$R_{\alpha\beta\gamma\delta}$ は反対称な指標 α and β を持つ。組み (α , β) の数は

$$\frac{4 \times 3}{2} = 6\,. \tag{38}$$

同様に (γ, δ) の組みも 6 つ。

$R_{\alpha\beta\gamma\delta}$ は $R_{[\alpha\beta][\gamma\delta]}$ のようにその組 $[\alpha\beta]$ と $[\gamma\delta]$ について対称行列のように見ることができる。なので独立要素の数は

$$\frac{6 \times 7}{2} = 21 \tag{39}$$

と勘定できた（まだ結論ではない）。

独立な要素の指標を書き出すと

$$\begin{aligned}
(\alpha\beta\gamma\delta) \quad = \quad & (0101), (0102), (0103), (0112), (0113), (0123), \\
& (0202), (0203), (0212), (0213), (0223), (0303), \\
& (0312), (0313), (0323), (1212), (1213), (1223), \\
& (1313), (1323), (2323)
\end{aligned} \tag{40}$$

である。

しかし後ろ 3 つの指標のサイクリック対称性 (27) より

$$R_{0123} - R_{0213} + R_{0312} = 0 \tag{41}$$

の「制約」があるので，真の独立要素数は 20 であることがわかる。

2.6.2 D dimensions

(26) から

$$\frac{D(D-1)}{2} \times \frac{D(D-1)}{2} = \frac{D^2(D-1)^2}{4} \tag{42}$$

ただし (25) は考慮しない。

「制約」(27) の個数は

$$D \times \frac{D(D-1)(D-2)}{3!} = \frac{D^2(D-1)(D-2)}{6} \tag{43}$$

なので，真の独立な要素の数は

$$\frac{D^2(D-1)^2}{4} - \frac{D^2(D-1)(D-2)}{6} = \frac{D^2(D^2-1)}{12} \tag{44}$$

である。

つまり対称性 (25) は (26) と (27) から導かれるもので，独立な対称性ではないということである（佐々木節氏の教科書など参照）。

<u>exercise</u>

(25) は (26) と (27) から導かれることを具体的に示せ。

結局， Riemann tensor は

$$\frac{D^2(D^2-1)}{12} \tag{45}$$

個の独立要素，自由度を持つことがわかった。

2.6.3 two dimensions

$\mu, \nu = 1, 2$ とする。

ただ一つの曲率の自由度は

$$R_{1212} \tag{46}$$

である（ガウス先生！）。

したがって，他のテンソルもこれを使って表される：

Ricci tensor:

$$\begin{aligned} R_{11} &= g^{22} R_{2121} = g^{22} R_{1212} \\ R_{22} &= g^{11} R_{1212} \\ R_{12} &= R_{21} = g^{21} R_{2112} = -g^{12} R_{1212} \end{aligned} \tag{47}$$

Scalar curvature:

$$\begin{aligned} R &= g^{11} R_{11} + g^{22} R_{22} + 2g^{12} R_{12} \\ &= 2g^{11} g^{22} R_{1212} - 2g^{12} g^{12} R_{1212} \\ &= 2\left(g^{11} g^{22} - g^{12} g^{12}\right) R_{1212} \end{aligned} \tag{48}$$

さて，The inverse of the metric は

$$g^{11} = \frac{1}{g} g_{22}\,, \quad g^{22} = \frac{1}{g} g_{11}\,, \quad g^{12} = -\frac{1}{g} g_{12}\,, \tag{49}$$

ここで

$$g = g_{11} g_{22} - g_{12} g_{12} \tag{50}$$

である。

したがって

$$R_{11} = \frac{1}{g} g_{11} R_{1212}\,, \quad R_{22} = \frac{1}{g} g_{22} R_{1212}\,, \quad R_{12} = \frac{1}{g} g_{12} R_{1212} \tag{51}$$

そしてまた

$$g^{11}g^{22} - g^{12}g^{12} = \frac{1}{g} \tag{52}$$

なので

$$R = \frac{2}{g}R_{1212} \tag{53}$$

と表される。

以上から明らかなように，２次元空間では，恒等的に

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R \equiv 0\,, \tag{54}$$

であり，

$$R_{\mu\nu\rho\sigma} \equiv \frac{1}{2}R\left(g_{\mu\rho}g_{\nu\sigma} - g_{\mu\sigma}g_{\nu\rho}\right)\,, \tag{55}$$

である。

2.6.4 three dimensions

$\mu, \nu = 1, 2, 3$ とする。

３次元空間に於ける独立なリーマンテンソルの要素は

$$R_{1212},\quad R_{1223},\quad R_{1231},\quad R_{2323},\quad R_{2331},\quad R_{3131}\,. \tag{56}$$

である。

したがってリッチテンソルは

$$\begin{aligned}
R_{11} &= g^{22}R_{2121} + g^{33}R_{3131} + g^{23}R_{2131} + g^{32}R_{3121} \\
&= g^{22}R_{1212} + g^{33}R_{3131} - 2g^{23}R_{1231} \\
R_{22} &= g^{11}R_{1212} + g^{33}R_{3232} + g^{31}R_{3212} + g^{13}R_{1232} \\
&= g^{11}R_{1212} + g^{33}R_{2323} - 2g^{31}R_{1223} \\
R_{33} &= g^{11}R_{1313} + g^{22}R_{2323} + g^{12}R_{1323} + g^{21}R_{2313} \\
&= g^{11}R_{3131} + g^{22}R_{2323} - 2g^{12}R_{2331} \\
R_{12} &= g^{21}R_{2112} + g^{23}R_{2132} + g^{31}R_{3112} + g^{33}R_{3132} \\
&= -g^{12}R_{1212} + g^{23}R_{1223} + g^{13}R_{1231} - g^{33}R_{2331} \\
R_{23} &= g^{12}R_{1223} + g^{11}R_{1213} + g^{32}R_{3223} + g^{31}R_{3213} \\
&= g^{12}R_{1223} - g^{11}R_{1231} - g^{23}R_{2323} + g^{13}R_{2331} \\
R_{31} &= g^{22}R_{2321} + g^{12}R_{1321} + g^{13}R_{1331} + g^{23}R_{2331} \\
&= -g^{22}R_{1223} + g^{12}R_{1231} - g^{13}R_{3131} + g^{23}R_{2331}
\end{aligned} \tag{57}$$

と表される。

さらに，慣性系では（$g_{\mu\nu}(X_0) = \delta_{\mu\nu}$），

$$\begin{pmatrix} R_{11} \\ R_{22} \\ R_{33} \\ R_{12} \\ R_{23} \\ R_{31} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R_{2323} \\ R_{3131} \\ R_{1212} \\ R_{2331} \\ R_{3112} \\ R_{1223} \end{pmatrix} \tag{58}$$

そしてその逆

$$\begin{pmatrix} R_{2323} \\ R_{3131} \\ R_{1212} \\ R_{2331} \\ R_{3112} \\ R_{1223} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R_{11} \\ R_{22} \\ R_{33} \\ R_{12} \\ R_{23} \\ R_{31} \end{pmatrix} \tag{59}$$

という関係が見いだされる。３次元ではリーマンもリッチも独立要素数は６。

exercise

３次元時空では

$$\begin{aligned} R_{\alpha\beta\gamma\delta} &= R_{\alpha\gamma}g_{\beta\delta} + R_{\beta\delta}g_{\alpha\gamma} - R_{\alpha\delta}g_{\beta\gamma} - R_{\beta\gamma}g_{\alpha\delta} \\ &\quad -\frac{1}{2}R\left(g_{\alpha\gamma}g_{\beta\delta} - g_{\alpha\delta}g_{\beta\gamma}\right) \\ &= -\epsilon_{\alpha\beta\mu}\epsilon_{\gamma\delta\nu}R^{\mu\nu}\,. \end{aligned} \tag{60}$$

だそうですが，本当かなあ？

2.7 weak field

時空がほぼ平坦であることを仮定する。このとき計量テンソルの平らな時空からのずれを取り出して考えることにする。すなわち

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + \kappa h_{\mu\nu} \tag{61}$$

もちろん $h_{\mu\nu} = h_{\nu\mu}$ である。

平坦に近い時空と言うことで，κ の１次の寄与のみを取り出して見る（後により高い次数について考察する）。式 (24) から

$$R_{\lambda\sigma\beta\alpha} = -\frac{\kappa}{2}\left(\partial_\lambda\partial_\beta h_{\alpha\sigma} - \partial_\lambda\partial_\alpha h_{\beta\sigma} + \partial_\sigma\partial_\alpha h_{\lambda\beta} - \partial_\sigma\partial_\beta h_{\lambda\alpha}\right)\,, \tag{62}$$

また

$$R_{\sigma\alpha} = \eta^{\lambda\beta}R_{\lambda\sigma\beta\alpha} = -\frac{\kappa}{2}\left(\partial^2 h_{\alpha\sigma} - \partial_\lambda\partial_\alpha h^\lambda_\sigma + \partial_\sigma\partial_\alpha h - \partial_\sigma\partial_\lambda h^\lambda_\alpha\right)\,, \tag{63}$$

である。ここで $\partial^2 \equiv \partial_\rho\partial^\rho$ と $h \equiv \eta^{\rho\sigma}h_{\rho\sigma}$ という記法を導入している。

スカラー曲率は

$$\begin{aligned} R = \eta^{\sigma\alpha}R_{\sigma\alpha} &= -\frac{\kappa}{2}\left(\partial^2 h - \partial_\lambda\partial_\beta h^{\lambda\beta} + \partial^2 h - \partial_\alpha\partial_\lambda h^{\lambda\alpha}\right) \\ &= -\kappa\left(\partial^2 h - \partial_\lambda\partial_\beta h^{\lambda\beta}\right)\,, \end{aligned} \tag{64}$$

アインシュタインテンソルは

$$\begin{aligned} &G_{\sigma\alpha} = R_{\sigma\alpha} - \frac{1}{2}\eta_{\sigma\alpha}R \\ &= -\frac{\kappa}{2}\left[\partial^2 h_{\alpha\sigma} - \partial_\lambda\partial_\alpha h^\lambda_\sigma - \partial_\sigma\partial_\lambda h^\lambda_\alpha + \partial_\sigma\partial_\alpha h - \eta_{\sigma\alpha}\left(\partial^2 h - \partial_\lambda\partial_\beta h^{\lambda\beta}\right)\right], \end{aligned} \tag{65}$$

となる。

exercise

$\nabla_\mu G^{\mu\nu} = 0$　を示せ

ちなみに

$$
\begin{aligned}
g^{\mu\nu}\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu} &= \eta^{\mu\nu}\frac{1}{2}\eta^{\alpha\sigma}\left(\partial_\mu h_{\sigma\nu}+\partial_\nu h_{\sigma\mu}-\partial_\sigma h_{\mu\nu}\right) \\
&= \partial_\mu h^{\alpha\mu}-\frac{1}{2}\partial^\alpha h \qquad (66)
\end{aligned}
$$

である。

線形化されたアインシュタイン方程式は

$$
\partial^2 h_{\alpha\sigma}-\partial_\lambda\partial_\alpha h^\lambda_\sigma+\partial_\sigma\partial_\alpha h-\partial_\sigma\partial_\lambda h^\lambda_\alpha=-\frac{\kappa}{2}\left(T_{\mu\nu}-\frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}T\right) \qquad (67)
$$

であり，書き直すと

$$
\begin{aligned}
&\partial^2 h_{\alpha\sigma}-\partial_\alpha\left(\partial_\lambda h^\lambda_\sigma-\frac{1}{2}\partial_\sigma h\right)-\partial_\sigma\left(\partial_\lambda h^\lambda_\alpha-\frac{1}{2}\partial_\alpha h\right) \\
= &-\frac{\kappa}{4}\left(\delta^\alpha_\mu\delta^\beta_\nu+\delta^\alpha_\nu\delta^\beta_\mu-\eta_{\mu\nu}\eta^{\alpha\beta}\right)T_{\alpha\beta} \qquad (68)
\end{aligned}
$$

と表される。このような形の式は後にまた見ることになるであろう。

さて，線形化されたアインシュタイン方程式の (00) 要素は

$$
-\nabla^2(\kappa h_{00})=-16\pi G\left(T_{00}-\frac{1}{2}T\right) \qquad (69)
$$

となることがわかるので，質量密度のみが効く場合に

$$
T_{\mu\nu}=diag.(\rho,0,0,0) \qquad (70)
$$

となることから

$$
-\nabla^2(\kappa h_{00})=-8\pi G\rho \qquad (71)
$$

というポアソン方程式を得る。

特に

$$
\rho=M\delta^3(\mathbf{x}) \qquad (72)
$$

の場合，解は

$$
g_{00}\approx 1-\frac{2GM}{r} \qquad (73)
$$

である。

3 Fields and particles

3.1 massless field and gauge invariance

この節では，いったん重力の話は忘れた振りをして，素粒子論で使う場の理論を見ていく。結局はご承知の通り，スピン 2 の粒子を表す場を見ることになる。ここでは，$\eta_{\mu\nu}=diag.(1,-1,-1,-1)$。

まずは質量のない場を見ていこう。それらは，ソースの間に長距離力をもたらす。

まずは，ラグランジアン（密度，以下しばしば省略）の一覧から。

<u>spin 0</u>

スピン 0 の場のラグランジアンは

$$
\mathcal{L}_S=\frac{1}{2}\partial^\mu\phi\partial_\mu\phi-J\phi, \qquad (74)
$$

である。ここで J はソース。

spin 1

スピン 1 の場のラグランジアンは

$$\mathcal{L}_V = -\frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} - J^\mu A_\mu \,. \tag{75}$$

ここで　$F_{\mu\nu} \equiv \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$。

spin 2

スピン 2 の場のラグランジアンは

$$\mathcal{L}_T = \frac{1}{2} \left(\partial^\rho h^{\mu\nu} \partial_\rho h_{\mu\nu} - 2\partial^\nu h^{\mu\rho} \partial_\rho h_{\mu\nu} + 2\partial_\mu h \partial_\nu h^{\nu\mu} - \partial^\mu h \partial_\mu h \right) - J^{\mu\nu} h_{\mu\nu} \,. \tag{76}$$

ここで $h_{\mu\nu} = h_{\nu\mu}$ and $h \equiv h^\mu_\mu$。

それぞれラグランジアンの変分から，運動方程式が求められる：

$$spin\ 0: \quad \partial^\mu \partial_\mu \phi = -J \tag{77}$$

$$spin\ 1: \quad \partial_\mu F^{\mu\nu} = J^\nu \tag{78}$$

$$spin\ 2: \quad \begin{aligned} &\partial^\rho \partial_\rho h^{\mu\nu} - \partial^\mu \partial_\rho h^{\rho\nu} - \partial^\nu \partial_\rho h^{\rho\mu} + \partial^\mu \partial^\nu h + \eta^{\mu\nu} \left(\partial_\rho \partial_\sigma h^{\rho\sigma} - \partial^\rho \partial_\rho h \right) \\ &= -J^{\mu\nu} \end{aligned} \tag{79}$$

スピン 1 とスピン 2 の場の場合，ソースに対する条件が付くことがわかる：

$$\partial_\mu J^\mu = 0 \tag{80}$$

$$\partial_\mu J^{\mu\nu} = 0 \tag{81}$$

これはゲージ不変性と関係しているが，この性質を要求すると運動方程式は上にあげたような形にほぼユニークに決まる [1, 2, 3]。

ソースの性質も含めて，ラグランジアンには下記のような変換の下での gauge invariance があることがわかる。

$$spin\ 1: \quad \delta A_\mu = -\partial_\mu \zeta \tag{82}$$

$$spin\ 2: \quad \delta h_{\mu\nu} = \partial_\mu \xi_\nu + \partial_\nu \xi_\mu \tag{83}$$

3.2 gauge fixing

ゲージ理論では，ゲージ自由度は物理的でないので，様々な解析ではゲージ固定をして考察を進める。

3.2.1 spin 1

運動方程式は

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = \partial_\mu \partial^\mu A^\nu - \partial_\mu \partial^\nu A^\mu = \partial^2 A^\nu - \partial^\nu (\partial_\mu A^\mu) = J^\nu \tag{84}$$

と書けるので，次のようなゲージ条件を課すのがシンプルである。

$$\text{Lorenz gauge :} \qquad \partial_\mu A^\mu = 0 \tag{85}$$

このとき，運動方程式は

$$\partial^2 A^\nu = J^\nu \tag{86}$$

となる。またラグランジアンも

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_V &= \frac{1}{2} A^\nu \partial^2 A_\nu - J^\nu A_\nu \\ &= \frac{1}{2} A^\mu (\eta_{\mu\nu} \partial^2) A^\nu - J^\nu A_\nu \end{aligned} \tag{87}$$

のように簡潔になる。

3.2.2 spin 2

$$\partial^2 h^{\mu\nu} - \partial^\mu \partial_\rho h^{\rho\nu} - \partial^\nu \partial_\rho h^{\rho\mu} + \partial^\mu \partial^\nu h + \eta^{\mu\nu} \left(\partial_\sigma \partial_\rho h^{\rho\sigma} - \partial^2 h \right) = -J^{\mu\nu} \tag{88}$$

もっとも良く用いられるのは，harmonic gauge または de Donder gauge　条件とよばれるのもので

$$\partial_\rho h^{\rho\mu} - \frac{1}{2} \partial^\mu h = 0 \tag{89}$$

である。

これを採用すると，運動方程式は

$$\partial^2 h^{\mu\nu} - \frac{1}{2} \eta^{\mu\nu} \partial^2 h = -J^{\mu\nu} \tag{90}$$

となる。またこのトレースを取ると

$$\partial^2 h - 2\partial^2 h = -\partial^2 h = -\eta_{\mu\nu} J^{\mu\nu} \tag{91}$$

なので，

$$\partial^2 h^{\mu\nu} = -\left(J^{\mu\nu} - \frac{1}{2} \eta^{\mu\nu} J \right) \tag{92}$$

と書いても等価である（なんか見覚えありますね)。ここで $J \equiv \eta_{\rho\sigma} J^{\rho\sigma}$ とした。

またさらに次のようにも表せる。

$$\begin{aligned} \partial^2 h^{\mu\nu} &= -\frac{1}{2} \left(\eta^{\mu\alpha} \eta^{\nu\beta} + \eta^{\nu\alpha} \eta^{\mu\beta} - \eta^{\mu\nu} \eta^{\alpha\beta} \right) J_{\alpha\beta} \\ &\equiv -\left(I^{\mu\nu,\alpha\beta} - \frac{1}{2} \eta^{\mu\nu} \eta^{\alpha\beta} \right) J_{\alpha\beta} \equiv -\mathcal{P}^{\mu\nu,\alpha\beta} J_{\alpha\beta} \end{aligned} \tag{93}$$

ここで 2 つのテンソルを導入したことに注意。後でも使う。

別の変数をとって，簡潔に表すこともある。つぎのような組み合わせで考える。

$$\bar{h}^{\mu\nu} \equiv h^{\mu\nu} - \frac{1}{2}\eta^{\mu\nu}h \tag{94}$$

これを使えば，運動方程式は極めて単純になる。

$$\partial^2 \bar{h}^{\mu\nu} = -J^{\mu\nu} \tag{95}$$

ゲージ固定条件も簡潔になる。

$$\partial_\rho \bar{h}^{\rho\mu} = \partial_\rho h^{\rho\mu} - \frac{1}{2}\partial^\mu h\,, \tag{96}$$

であることに気が付けば，de Donder gauge 条件は

$$\partial_\rho \bar{h}^{\rho\mu} = 0 \tag{97}$$

と書ける。

ゲージ固定をしたラグランジアンは

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_T &= \frac{1}{2}\left(\partial^\rho h^{\mu\nu}\partial_\rho h_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\partial^\mu h \partial_\mu h\right) - J^{\mu\nu}h_{\mu\nu} \\
&= -\frac{1}{2}\left(h^{\mu\nu}\partial^2 h_{\mu\nu} - \frac{1}{2}h\partial^2 h\right) - J^{\mu\nu}h_{\mu\nu} \\
&= -\frac{1}{4}h^{\alpha\beta}\left(\eta_{\alpha\mu}\eta_{\beta\nu} + \eta_{\alpha\nu}\eta_{\beta\mu} - \eta_{\alpha\beta}\eta_{\mu\nu}\right)\partial^2 h^{\mu\nu} - J^{\mu\nu}h_{\mu\nu} \\
&= -\frac{1}{2}h^{\alpha\beta}\left(I_{\alpha\beta,\mu\nu} - \frac{1}{2}\eta_{\alpha\beta}\eta_{\mu\nu}\right)\partial^2 h^{\mu\nu} - J^{\mu\nu}h_{\mu\nu}
\end{aligned} \tag{98}$$

となる。

ここから求めた運動方程式は

$$\left(I_{\alpha\beta,\mu\nu} - \frac{1}{2}\eta_{\alpha\beta}\eta_{\mu\nu}\right)\partial^2 h^{\mu\nu} = -J^{\mu\nu} \tag{99}$$

となる。

<u>exercise</u>

下記の関係式をチェックせよ。

$$I^{\mu\nu,\alpha\beta}I_{\alpha\beta,\rho\sigma} = I^{\mu\nu,}{}_{\rho\sigma} \tag{100}$$

$$I^{\mu\nu,\alpha\beta}\eta_{\alpha\beta} = \eta^{\mu\nu} \tag{101}$$

$$\mathcal{P}^{\mu\nu,\alpha\beta}\eta_{\alpha\beta} = -\eta^{\mu\nu} \tag{102}$$

$$\mathcal{P}^{\mu\nu,\alpha\beta}I_{\alpha\beta,\rho\sigma} = \mathcal{P}^{\mu\nu,}{}_{\rho\sigma} \tag{103}$$

$$\mathcal{P}^{\mu\nu,\alpha\beta}\mathcal{P}_{\alpha\beta,\rho\sigma} = I^{\mu\nu,}{}_{\rho\sigma} \tag{104}$$

また，D 次元時空ではどうなるか？

4 Free massless states

平面波状態 e^{-ikx} を考えると，いずれのスピンでも $k^2 = 0$ が運動方程式より要求される。あとは偏光（偏極）状態の勘定をする。

4.1 massless spin 1

$$A_\mu = \epsilon_\mu e^{-ikx} \tag{105}$$

とおく。ここで ϵ_μ は偏光ベクトルである。

われわれは Lorenz gauge $(\partial_\mu A^\mu = 0)$ を選ぶ。これは

$$k_\mu \epsilon^\mu = 0 \tag{106}$$

と等価である。

しかしまだ「ゲージ変換」の自由度は残っている。すなわち偏光ベクトルの変換

$$\epsilon_\mu \to \epsilon_\mu + \lambda k_\mu \tag{107}$$

を施しても，質量のない on shell 条件 $k^2 = 0$ によりゲージ条件は不変のままである：

$$k^\mu \epsilon_\mu \to k^\mu \epsilon_\mu + \lambda k^\mu k_\mu = k^\mu \epsilon_\mu \,. \tag{108}$$

したがって，この変換の自由度により，さらに偏光ベクトルの形に制限を設けることができる。例えば

$$\epsilon_0 = 0\,, \quad k_i \epsilon^i = 0 \qquad (i = 1,2,3) \tag{109}$$

とする事ができる。

座標系を選んで $k_\mu = (k,0,0,k)$ とすれば，互いに直交するベクトルは

$$\vec{\epsilon}_{(1)} = (1,0,0)\,, \quad \vec{\epsilon}_{(2)} = (0,1,0)\,, \tag{110}$$

であり，

$$\eta_{\mu\nu} \epsilon^{*\mu}_{(\lambda)} \epsilon^{\nu}_{(\lambda')} = -\delta_{\lambda\lambda'} \tag{111}$$

を満たす。

完全系は，$\vec{\epsilon}^{\,\mu}_{(1)}$,，$\vec{\epsilon}^{\,\mu}_{(2)}$ とさらに $\vec{\epsilon}^{\,\mu}_{(3)} = (0,0,1) = \mathbf{k}/|\mathbf{k}|$ で構成されるから

$$\sum_{\lambda=1}^{2} \vec{\epsilon}^{\,i}_{(\lambda)} \vec{\epsilon}^{\,*j}_{(\lambda)} = \delta^{ij} - \frac{k^i k^j}{\mathbf{k}^2} \equiv p^{ij} \tag{112}$$

となる。ちなみに

$$p_{ij} = p_{ji}\,, \qquad k^i p_{ij} = 0\,, \qquad p^i_i = 2 \tag{113}$$

$$p_{ik} p^{kj} = p^j_i \tag{114}$$

であるので，p_{ij} は transverse space への射影行列である。

偏光の自由度は２である。それは A_μ の指標の数４，ゲージ固定条件１，残った変換の自由度１なので $dof = 4 - 1 - 1 = 2$ と理解される。

4.2 massless spin 2

$$h_{\mu\nu} = \epsilon_{\mu\nu} e^{-ikx} \tag{115}$$

とする。ここで polarization tensor は対称である：

$$\epsilon^{\mu\nu} = \epsilon^{\nu\mu}\,. \tag{116}$$

de Donder gauge をとると

$$k_\mu \epsilon^{\mu\nu} - \frac{1}{2} k^\nu \epsilon^\mu_\mu = 0 \tag{117}$$

がわかる。

例によって，この条件は下記の変換で不変：

$$\epsilon_{\mu\nu} \to \epsilon_{\mu\nu} - \lambda \left(k_\mu \epsilon_\nu + k_\nu \epsilon_\mu \right) \, . \tag{118}$$

この自由度を用いて，次のように選ぶ。

$$\epsilon_{0\mu} = 0 \, . \tag{119}$$

すると (117) から

$$\epsilon^\mu_\mu = 0 \, . \tag{120}$$

が要求されるのがわかり，結局

$$k_i \epsilon^{ij} = 0 \, , \quad \epsilon^i_i = 0 \tag{121}$$

偏光の自由度は $dof = 10 - 4 - 4 = 2$ である。

具体的には偏光テンソルは

$$\epsilon_+ = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \, , \qquad \epsilon_\times = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{122}$$

が用いられる。

4.3 propagator for massless fields

プロパゲータは，ゲージ固定した運動方程式で，前節と同様平面波を仮定し，場について解いたとき，ソースに掛けるものである。[8]

以下，i を付けるのは，量子力学的習慣，あるいは $\cdots e^{iS}$ の i に由来するものだと思えばよい。

$$spin\ 0: \quad iD = \frac{i}{k^2} \tag{123}$$

$$spin\ 1: \quad iD_{\mu\nu} = -i \frac{\eta_{\mu\nu}}{k^2} \tag{124}$$

$$spin\ 2: \quad iD_{\mu\nu,\rho\sigma} = \frac{1}{2} \left(\eta_{\mu\rho}\eta_{\nu\sigma} + \eta_{\mu\sigma}\eta_{\nu\rho} - \eta_{\mu\nu}\eta_{\rho\sigma} \right) \frac{i}{k^2} = \frac{i\mathcal{P}_{\mu\nu,\rho\sigma}}{k^2} \tag{125}$$

5 Massive fields

5.1 massive fields and dof

質量のある場について考える。

[8] 普通は，ソースって掛けるものですよねえ

5.1.1 spin 0

ソース無しのラグランジアンは

$$\mathcal{L}_S = \frac{1}{2}\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi - \frac{1}{2}m^2\phi^2 \tag{126}$$

運動方程式は

$$\left(\partial^2 + m^2\right)\phi = 0 \tag{127}$$

粒子についてのアインシュタインの関係式 $E^2 = p^2 + m^2$ につながっている。

自由度はもちろん１。$dof = 1 = 2s+1|_{s=0}$ なので，スピン角運動量は０である。

5.1.2 spin 1

ソース無しのラグランジアンは

$$\mathcal{L}_V = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{1}{2}m^2 A_\mu A^\mu\,, \tag{128}$$

運動方程式は

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} + m^2 A^\nu = 0 \tag{129}$$

である（Proca 方程式)。

運動方程式の発散を取ると

$$\partial_\mu\partial_\nu F^{\mu\nu} + m^2\partial_\nu A^\nu = 0 \Rightarrow \partial_\mu A^\mu = 0 \tag{130}$$

であることがわかるから，運動方程式に戻すと

$$\left(\partial^2 + m^2\right)A^\nu = 0 \tag{131}$$

であることがわかる。スピン０の場合と同様の形。

自由度は，条件式１つあることから $dof = 4-1 = 3 = 2s+1|_{s=1}$ であり，スピン角運動量１に対応する。

ゲージ不変性はないことに注意する。

平面波の形

$$A_\mu = \epsilon_\mu e^{-ikx} \tag{132}$$

を仮定すると，

$$k^2 = m^2\,, \qquad k^\mu\epsilon_\mu = 0 \tag{133}$$

である。

$k = (k^0, 0, 0, k^3)$ に直交し，互いに直交する３つのベクトルは

$$\epsilon_{(1)} = (0,1,0,0)\,, \quad \epsilon_{(2)} = (0,0,1,0)\,, \quad \epsilon_{(3)} = (k^3/m, 0, 0, k^0/m) \tag{134}$$

である。これらは

$$\eta_{\mu\nu}\epsilon^{*\mu}_{(\lambda)}\epsilon^\nu_{(\lambda')} = -\delta_{\lambda\lambda'} \tag{135}$$

を満たす。

完全系は $(k^\mu/m, \epsilon^\mu_{(\lambda)})$ によって構成されるので

$$-\sum_{\lambda=1}^{3}\epsilon^\mu_{(\lambda)}\epsilon^{*\nu}_{(\lambda)} = \eta^{\mu\nu} - \frac{k^\mu k^\nu}{m^2} \equiv P^{\mu\nu} \tag{136}$$

ここで $P_{\mu\nu}$ は以下を満たす：

$$P_{\mu\nu} = P_{\nu\mu}\,, \qquad k^\mu P_{\mu\nu} = 0\,, \qquad P^\mu_\mu = 3\,, \tag{137}$$

$$P_{\mu\sigma} P^{\sigma\nu} = P^\nu_\mu\,. \tag{138}$$

ソース J^μ があるときは

$$m^2 \partial_\mu A^\mu = \partial_\mu J^\mu \tag{139}$$

となるので，運動方程式に戻し

$$\partial^2 A^\nu - \partial^\nu(\partial_\mu A^\mu) + m^2 A^\nu = J^\nu \Rightarrow \partial^2 A^\nu + m^2 A^\nu = J^\nu + \frac{\partial^\nu \partial_\mu J^\mu}{m^2} \tag{140}$$

これを整理すると

$$(-k^2 + m^2)\epsilon^\nu = \left(\eta^{\nu\mu} - \frac{k^\nu k^\mu}{m^2}\right) J_\mu \tag{141}$$

となる。

したがって propagator は

$$\frac{-iP_{\mu\nu}}{k^2 - m^2} \tag{142}$$

となることが読みとれ，もし保存する（divergent-free）カレントのみがくっつくなら propagator は

$$\frac{-i\eta_{\mu\nu}}{k^2 - m^2} \tag{143}$$

で良いこととなる。

5.1.3 spin 2

ソースなしのラグランジアンは

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_T \;=\; & \frac{1}{2}\left(\partial^\rho h^{\mu\nu}\partial_\rho h_{\mu\nu} - 2\partial^\nu h^{\mu\rho}\partial_\rho h_{\mu\nu} + 2\partial_\mu h \partial_\nu h^{\nu\mu} - \partial^\mu h \partial_\mu h\right) \\ & -\frac{1}{2} m^2 (h_{\mu\nu} h^{\mu\nu} - h^2) \end{aligned} \tag{144}$$

で，運動方程式は

$$\begin{aligned} & \partial^2 h^{\mu\nu} - \partial^\mu \partial_\rho h^{\rho\nu} - \partial^\nu \partial_\rho h^{\rho\mu} + \partial^\mu \partial^\nu h + \eta^{\mu\nu}\left(\partial_\rho \partial_\sigma h^{\rho\sigma} - \partial^2 h\right) \\ & + m^2 (h^{\mu\nu} - h\eta^{\mu\nu}) = 0 \end{aligned} \tag{145}$$

となる（Pauli-Fierz 方程式）。

発散を取ると，すぐわかるように，

$$\partial_\mu h^{\mu\nu} - \partial^\nu h = 0 \tag{146}$$

が導かれる。これを運動方程式に戻すと

$$\partial^2 h^{\mu\nu} - \partial^\mu \partial^\nu h + m^2 (h^{\mu\nu} - h\eta^{\mu\nu}) = 0 \tag{147}$$

となる。

次にトレースを取ると

$$h = 0\,, \tag{148}$$

が出るので，前のと併せて

$$\partial_\mu h^{\mu\nu} = 0 \tag{149}$$

でもあるので，運動方程式は

$$\left(\partial^2 + m^2\right) h^{\mu\nu} = 0 \tag{150}$$

となる。スピンによらず似た形。

自由度は，条件式の引き算から $dof = 10 - 4 - 1 = 5 = \left. 2s+1\right|_{s=2}$ なので，スピン 2 と解釈できる。

ソースのあるときを考える。

運動方程式の発散を取ると

$$m^2(\partial_\mu h^{\mu\nu} - \partial^\nu h) = -\partial_\mu J^{\mu\nu}\,. \tag{151}$$

もう一回取ると

$$m^2(\partial_\mu\partial_\nu h^{\mu\nu} - \partial^2 h) = -\partial_\mu\partial_\nu J^{\mu\nu}\,. \tag{152}$$

運動方程式のトレースは

$$2\left(\partial_\rho\partial_\sigma h^{\rho\sigma} - \partial^2 h\right) - 3m^2 h = -J^\mu_\mu \tag{153}$$

以上から

$$\frac{3}{2}m^2 h = -\frac{\partial_\mu\partial_\nu J^{\mu\nu}}{m^2} + \frac{1}{2}J^\mu_\mu \tag{154}$$

さて運動方程式に戻して書き換えると

$$\begin{aligned}
&(\partial^2 + m^2)h^{\mu\nu} \\
&= -J^{\mu\nu} - \frac{1}{m^2}\partial^\mu\partial_\rho J^{\rho\nu} - \frac{1}{m^2}\partial^\nu\partial_\rho J^{\rho\mu} + \frac{1}{m^2}\eta^{\mu\nu}\partial_\sigma\partial_\rho J^{\rho\sigma} \\
&+\frac{2}{3}\left(\frac{1}{m^2}\partial^\mu\partial^\nu + \eta^{\mu\nu}\right)\left(-\frac{\partial_\rho\partial_\sigma J^{\rho\sigma}}{m^2} + \frac{1}{2}J^\rho_\rho\right)
\end{aligned} \tag{155}$$

のようにかなり複雑。

しかし，ソースが保存則を満たせば，また場にくっつくものが皆保存するなら

$$\begin{aligned}
(\partial^2 + m^2)h^{\mu\nu} &= -J^{\mu\nu} + \frac{1}{3}\eta^{\mu\nu}J^\rho_\rho \\
&= -\left(\eta^{\mu\alpha}\eta^{\nu\beta} - \frac{1}{3}\eta^{\mu\nu}\eta^{\alpha\beta}\right)J_{\alpha\beta} \\
&= -\left[\frac{1}{2}\left(\eta^{\mu\alpha}\eta^{\nu\beta} + \eta^{\nu\alpha}\eta^{\mu\beta}\right) - \frac{1}{3}\eta^{\mu\nu}\eta^{\alpha\beta}\right]J_{\alpha\beta}
\end{aligned} \tag{156}$$

となる。

右辺のテンソル構造は質量のないときと異なることに注意。単純に $m \to 0$ としても，質量のない場の理論にはならないという discontinuity が存在。

5.2 Stückelberg formalism

質量項はゲージ不変性を壊すわけだが，変換不変性を考慮した形式がある。それがこの Stückelberg 形式。

5.2.1 spin 1

次のようなラグランジアンを見ると

$$\mathcal{L}_V = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{1}{2}m^2(A_\mu + \partial_\mu\phi)(A^\mu + \partial^\mu\phi) \tag{157}$$

これは以下の変換で不変であることがわかる：

$$\delta A_\mu = -\partial_\mu\zeta\,, \qquad \delta\phi = \zeta \tag{158}$$

この変換の自由度を使って，スカラー自由度を消すことができる。

場の自由度は，質量無しゲージ不変な場の自由度 2 とスカラー自由度 1 をたしたもの，$dof = 2+1 = 3 = \left. 2s+1\right|_{s=1}$ である。

$m \to 0$ の limit は，ϕ を予め ϕ/m に置き換えてからとればよく，独立な massless vector と massless scalar になるので，自由度は変わらない。

5.2.2 spin 2

ラグランジアン

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_T = & \frac{1}{2}\left(\partial^\rho h^{\mu\nu}\partial_\rho h_{\mu\nu} - 2\partial^\nu h^{\mu\rho}\partial_\rho h_{\mu\nu} + 2\partial_\mu h\partial_\nu h^{\nu\mu} - \partial^\mu h\partial_\mu h\right) \\ & -\frac{1}{2}m^2(h_{\mu\nu}h^{\mu\nu} - h^2) + 2(mA_\mu + \partial_\mu\phi)(\partial_\nu h^{\mu\nu} - \partial^\mu h) - \frac{1}{2}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}\end{aligned} \tag{159}$$

は，以下の変換の下で不変：

$$\delta h_{\mu\nu} = \partial_\mu\xi_\nu + \partial_\nu\xi_\mu\,, \quad \delta A_\mu = m\xi_\mu - \partial_\mu\zeta\,, \qquad \delta\phi = m\zeta \tag{160}$$

自由度は $dof = 2+2+1 = 5 = \left. 2s+1\right|_{s=2}$

6 Long range forces

massless field は長距離力を生む。

6.1 scalar boson exchange

static potential $V(r)$ は最低次で

$$V(r) = \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} \frac{i\mathcal{M}^{(1)}_{eff}}{(2m_1)(2m_2)} \tag{161}$$

ここで変な規格化因子は，場の展開係数のローレンツ変換因子 $2E$ とかに起因すると思って良い。

ソースを

$$J_1 = \sigma_1\delta^3(\mathbf{x})\,, \qquad J_2 = \sigma_2\delta^3(\mathbf{x}-\mathbf{r}) \tag{162}$$

とすると

$$i\mathcal{M}^{(1)}_{eff} = \left. i(2m_1)\sigma_1\frac{i}{k^2}(2m_2)\sigma_2\right|_{k^0=0} = -(2m_1)(2m_2)\frac{\sigma_1\sigma_2}{\mathbf{k}^2} \tag{163}$$

なので

$$V(r) = -\frac{\sigma_1\sigma_2}{4\pi r}\,. \tag{164}$$

同種のものには引力。

ちなみに massive な場合は

$$\frac{i}{k^2} \to \frac{i}{k^2-\mu^2} \tag{165}$$

$$V(r) = -\frac{\sigma_1\sigma_2}{4\pi r}e^{-\mu r} \tag{166}$$

これは湯川型ポテンシャル。

6.2 photon exchange

ソースは，とまっている点電荷。

$$J_1^\mu = q_1\delta_0^\mu\delta^3(\mathbf{x})\,, \qquad J_2^\mu = q_2\delta_0^\mu\delta^3(\mathbf{x}-\mathbf{r}) \tag{167}$$

このとき

$$i\mathcal{M}_{eff}^{(1)} = i(2m_1)q_1\delta_0^\alpha\frac{-i\eta_{\alpha\beta}}{k^2}(2m_2)q_2\delta_0^\beta\Big|_{k^0=0} = (2m_1)(2m_2)\frac{q_1q_2}{\mathbf{k}^2} \tag{168}$$

なので

$$V(r) = \frac{q_1q_2}{4\pi r} \tag{169}$$

同符号の電荷間には斥力が生じる。

6.3 graviton exchange

ソースは，とまっている質量。

$$T_1^{\mu\nu} = m_1\delta_0^\mu\delta_0^\nu\delta^3(\mathbf{x})\,, \qquad T_2^{\mu\nu} = m_2\delta_0^\mu\delta_0^\nu\delta^3(\mathbf{x}-\mathbf{r}) \tag{170}$$

このとき

$$\begin{aligned} i\mathcal{M}_{eff}^{(1)} &= i\frac{\kappa}{2}(2m_1^2)\delta_0^\mu\delta_0^\nu\frac{i\mathcal{P}_{\mu\nu,\alpha\beta}}{k^2}\frac{\kappa}{2}(2m_2^2)\delta_0^\alpha\delta_0^\beta\Big|_{k^0=0} \\ &= -(2m_1)(2m_2)\frac{\kappa^2 m_1m_2}{8\,\mathbf{k}^2} \end{aligned} \tag{171}$$

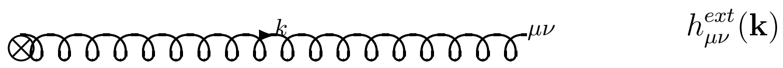
なので

$$V(r) = -\frac{Gm_1m_2}{r} \tag{172}$$

たしかに引力です。

質量 M が作る場は

$$\begin{aligned} h_{\mu\nu}^{ext}(\mathbf{k}) &= -i\frac{i\mathcal{P}_{\mu\nu,\alpha\beta}}{k^2}\frac{\kappa}{2}M\delta_0^\alpha\delta_0^\beta\Big|_{k^0=0} \\ &= \frac{\kappa M}{4\,\mathbf{k}^2}(\eta_{\mu\nu}-2\eta_{0\mu}\eta_{0\nu}) \end{aligned} \tag{173}$$



絵で描くとこんなの。

We call amplitudes including the external field as “semiclassical” amplitudes.

さて，この解からわかるのは，

$$g^{cl.}_{00} = \eta_{00} + \kappa h^{ext}_{00} = 1 - \frac{2GM}{r} \quad (174)$$

$$g^{cl.}_{ij} = \eta_{ij} + \kappa h^{ext}_{ij} = -\left(1 + \frac{2GM}{r}\right)\delta_{ij} \quad (175)$$

というように，ニュートン近似で計量がわかりました，ということ。

7 Post-Newtonian forces

ニュートン近似より先に行くには，線形以上を考えなくてはいけない。

7.1 interaction vertex

以前のように

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + \kappa\, h_{\mu\nu} \quad (176)$$

とする。ここで $\kappa = \sqrt{32\pi G}$。次の次数まで考慮する。すると以下のように表される：

$$g^{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu} - \kappa\, h^{\mu\nu} + \kappa^2 h^{\mu}_{\lambda} h^{\lambda\nu} + O(\kappa^3)\,, \quad (177)$$

$$\sqrt{-g} = 1 + \frac{\kappa}{2}h + \frac{\kappa^2}{8}(h^2 - 2h^{\mu\nu}h_{\mu\nu}) + O(\kappa^3)\,,^{9} \quad (178)$$

where $h^{\mu\nu} \equiv \eta^{\mu\alpha}h_{\alpha\beta}\eta^{\beta\nu}$, $h \equiv \eta^{\mu\nu}h_{\mu\nu}$. [10]

また

$$\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu} = \frac{\kappa}{2}(\partial_\mu h^{\lambda}_{\nu} + \partial_\nu h^{\lambda}_{\mu} - \partial_\lambda h_{\mu\nu}) - \frac{\kappa^2}{2}h^{\lambda\nu}(\partial_\mu h_{\nu\sigma} + \partial_\nu h_{\mu\sigma} - \partial_\sigma h_{\mu\nu}) + O(\kappa^3) \quad (179)$$

To obtain the three-graviton vertex, above is sufficient (why?).

Donder gauge $\partial_\mu h^{\mu}_{\nu} = \frac{1}{2}\partial_\nu h$ を使う。

そうきめると，展開は簡単になる。

The idea is to use

$$\begin{aligned}\Gamma_{\rho\mu\nu} \equiv g_{\rho\sigma}\Gamma^{\sigma}_{\mu\nu} &= \frac{1}{2}\left(\partial_\mu g_{\nu\rho} + \partial_\nu g_{\mu\rho} - \partial_\rho g_{\nu\mu}\right) \\ &= \frac{\kappa}{2}\left(\partial_\mu h_{\nu\rho} + \partial_\nu h_{\mu\rho} - \partial_\rho h_{\nu\mu}\right)\,. \quad (180)\end{aligned}$$

This is exact.

Therefore we get

$$\begin{aligned}\partial_\beta \Gamma^{\mu}_{\sigma\alpha} &= \partial_\beta(g^{\mu\rho}\Gamma_{\rho\sigma\alpha}) = g^{\mu\rho}\partial_\beta\Gamma_{\rho\sigma\alpha} + (\partial_\beta g^{\mu\rho})\Gamma_{\rho\sigma\alpha} \\ &= g^{\mu\rho}\partial_\beta\Gamma_{\rho\sigma\alpha} - (\Gamma^{\mu}_{\beta\tau}g^{\tau\rho} + \Gamma^{\rho}_{\beta\tau}g^{\tau\mu})\Gamma_{\rho\sigma\alpha} \\ &= g^{\mu\rho}\partial_\beta\Gamma_{\rho\sigma\alpha} - \Gamma^{\mu}_{\beta\rho}\Gamma^{\rho}_{\sigma\alpha} - g^{\tau\mu}g^{\lambda\rho}\Gamma_{\lambda\beta\tau}\Gamma_{\rho\sigma\alpha}\,, \quad (181)\end{aligned}$$

[9] $\ln\det A = \mathrm{Tr}\ln A$

[10] $\partial_\mu\sqrt{-g}g^{\mu\nu} = -\kappa\left(\partial_\mu h^{\mu\nu} - \frac{1}{2}\partial^\nu h\right) + O(\kappa^2)$

and

$$
\begin{aligned}
&R^{\mu}{}_{\sigma\beta\alpha} = \partial_\beta \Gamma^{\mu}_{\sigma\alpha} - \partial_\alpha \Gamma^{\mu}_{\sigma\beta} + \Gamma^{\mu}_{\rho\beta}\Gamma^{\rho}_{\sigma\alpha} - \Gamma^{\mu}_{\rho\alpha}\Gamma^{\rho}_{\sigma\beta} \\
&= g^{\mu\rho}\partial_\beta \Gamma_{\rho\sigma\alpha} - g^{\mu\rho}\partial_\alpha \Gamma_{\rho\sigma\beta} + g^{\tau\mu}g^{\lambda\rho}\Gamma_{\lambda\alpha\tau}\Gamma_{\rho\sigma\beta} - g^{\tau\mu}g^{\lambda\rho}\Gamma_{\lambda\beta\tau}\Gamma_{\rho\sigma\alpha}
\end{aligned}
\tag{182}
$$

The harmonic gauge $\eta^{\mu\nu}\Gamma_{\sigma\mu\nu} = 0$ makes it simple as

$$
\eta^{\sigma\alpha} R^{\mu}{}_{\sigma\beta\alpha} = -\eta^{\sigma\alpha} g^{\mu\rho}\partial_\alpha \Gamma_{\rho\sigma\beta} + \eta^{\sigma\alpha} g^{\tau\mu} g^{\lambda\rho}\Gamma_{\lambda\alpha\tau}\Gamma_{\rho\sigma\beta} \,, \tag{183}
$$

$$
\begin{aligned}
\eta^{\sigma\alpha} R_{\sigma\alpha} &= -\eta^{\sigma\alpha} g^{\beta\rho}\partial_\alpha \Gamma_{\rho\sigma\beta} + \eta^{\sigma\alpha} g^{\tau\beta} g^{\lambda\rho}\Gamma_{\lambda\alpha\tau}\Gamma_{\rho\sigma\beta} \\
&= -\frac{1}{2}\eta^{\sigma\alpha} g^{\beta\rho}\partial_\alpha\partial_\sigma h_{\rho\beta} + \eta^{\sigma\alpha} g^{\tau\beta} g^{\lambda\rho}\Gamma_{\lambda\alpha\tau}\Gamma_{\rho\sigma\beta} \,.
\end{aligned}
\tag{184}
$$

(Not so simple!!)

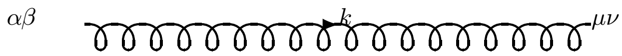
The Einstein-Hilbert action:

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}_{EH} &= \frac{1}{16\pi G}\sqrt{-g}R = \frac{2}{\kappa^2}\sqrt{-g}R \\
&= \frac{1}{2}\left(\partial^\mu h^{\nu\lambda}\partial_\mu h_{\nu\lambda} - \frac{1}{2}\partial^\mu h \partial_\mu h\right) \\
&\quad +\kappa\left(\frac{1}{2}h^{\alpha}_{\beta}\partial^\mu h^{\beta}_{\alpha}\partial_\mu h - \frac{1}{2}h^{\alpha}_{\beta}\partial_\alpha h^{\mu}_{\nu}\partial^\beta h^{\nu}_{\mu} - h^{\alpha}_{\beta}\partial_\mu h^{\nu}_{\alpha}\partial^\mu h^{\beta}_{\nu}\right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{4}h\partial^\alpha h^{\mu}_{\nu}\partial_\alpha h^{\nu}_{\mu} + h^{\beta}_{\mu}\partial_\nu h^{\alpha}_{\beta}\partial^\mu h^{\nu}_{\alpha} - \frac{1}{8}h\partial^\mu h\partial_\mu h\right) + O(\kappa^2)
\end{aligned}
\tag{185}
$$

where we use the de Donder gauge.

7.2 potential from diagram

Graviton propagator (for particle physicists)

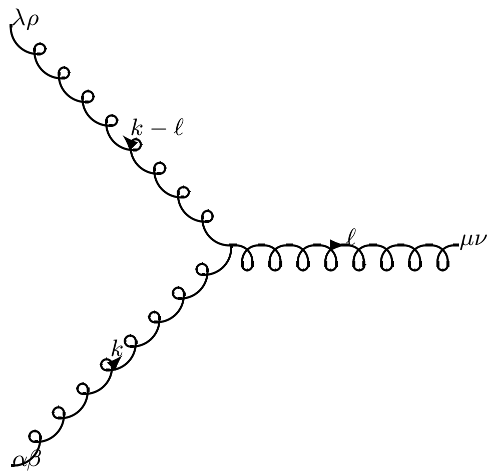


$$\frac{i\mathcal{P}_{\alpha\beta,\mu\nu}}{k^2+i\epsilon}$$

where $\mathcal{P}_{\alpha\beta,\mu\nu} = I_{\alpha\beta,\mu\nu} - \frac{1}{2}\eta_{\alpha\beta}\eta_{\mu\nu}$, $I_{\alpha\beta,\mu\nu} = \frac{1}{2}(\eta_{\alpha\mu}\eta_{\beta\nu} + \eta_{\alpha\nu}\eta_{\beta\mu})$
i originates from $\cdots e^{iS}$

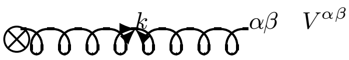
NOTE: 'symmetrization' is always important.

Three graviton vertex



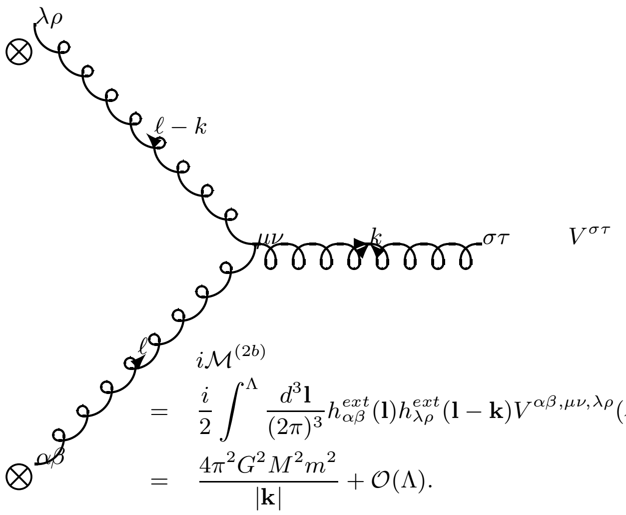
$V_{\alpha\beta,\mu\nu,\lambda\rho}(k,\ell,k-\ell)$

$$
\begin{aligned}
& V_{\alpha\beta,\mu\nu,\lambda\rho}(k,\ell,k-\ell) \\
= \quad & i\kappa\left\{-\frac{1}{2}(k^2+\ell^2+(k-\ell)^2)\left[I^{\sigma}_{\mu,\alpha\beta}I_{\lambda\rho,\sigma\nu}+I^{\sigma}_{\nu,\alpha\beta}I_{\lambda\rho,\sigma\mu}\right.\right. \\
& \left.+\frac{1}{4}\eta_{\alpha\beta}\eta_{\mu\nu}\eta_{\lambda\rho}-\frac{1}{2}(\eta_{\alpha\beta}I_{\mu\nu,\lambda\rho}+\eta_{\mu\nu}I_{\alpha\beta,\lambda\rho}+\eta_{\lambda\rho}I_{\alpha\beta,\mu\nu})\right] \\
& +\ell^{\sigma}(k-\ell)^{\tau}\left[I_{\mu\nu,\lambda\rho}I_{\alpha\beta,\sigma\tau}-\frac{1}{2}(I_{\alpha\beta,\rho\sigma}I_{\mu\nu,\lambda\tau}+I_{\alpha\beta,\lambda\sigma}I_{\mu\nu,\rho\tau}\right. \\
& \left.+I_{\lambda\rho,\nu\sigma}I_{\alpha\beta,\mu\tau}+I_{\lambda\rho,\mu\sigma}I_{\alpha\beta,\nu\tau})\right] \\
& -k^{\sigma}(k-\ell)^{\tau}\left[I_{\alpha\beta,\lambda\rho}I_{\mu\nu,\sigma\tau}-\frac{1}{2}(I_{\mu\nu,\rho\sigma}I_{\alpha\beta,\lambda\tau}+I_{\mu\nu,\lambda\sigma}I_{\alpha\beta,\rho\tau}\right. \\
& \left.+I_{\lambda\rho,\alpha\sigma}I_{\mu\nu,\beta\tau}+I_{\lambda\rho,\beta\sigma}I_{\mu\nu,\alpha\tau})\right] \\
& -k^{\sigma}\ell^{\tau}\left[I_{\alpha\beta,\mu\nu}I_{\lambda\rho,\sigma\tau}-\frac{1}{2}(I_{\lambda\rho,\beta\tau}I_{\mu\nu,\alpha\sigma}+I_{\lambda\rho,\alpha\tau}I_{\mu\nu,\beta\sigma}\right. \\
& \left.\left.+I_{\lambda\rho,\nu\sigma}I_{\alpha\beta,\mu\tau}+I_{\lambda\rho,\mu\sigma}I_{\alpha\beta,\nu\tau})\right]\right\}.
\end{aligned}
$$



$$
\begin{aligned}
i\mathcal{M}^{(1)}=i\mathcal{M}^{(1)}_{eff}/(2M) \quad &= \quad h^{ext}_{\alpha\beta}(\mathbf{k})i\,\underbrace{\frac{\kappa}{2}(2m)m\delta^{\alpha}_{0}\delta^{\beta}_{0}}_{V^{\alpha\beta}} \\
&= \quad \frac{4\pi GM}{\mathbf{k}^2}(\eta_{\alpha\beta}-2\delta^0_\alpha\delta^0_\beta)(2m)m\delta^{\alpha}_{0}\delta^{\beta}_{0} \\
&= \quad -\frac{4\pi GM}{\mathbf{k}^2}(2m^2)\,.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
V(r) \quad &= \quad \int\frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3}e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}\left.\frac{i\mathcal{M}^{(1)}}{\sqrt{2E'}\sqrt{2E}}\right|_{E'=E=m} \\
&= \quad -4\pi GMm\int\frac{d^3\mathbf{q}}{(2\pi)^3}\frac{e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}}{\mathbf{k}^2}=-\frac{GMm}{r} \qquad (186)
\end{aligned}
$$



$$
\begin{aligned}
& i\mathcal{M}^{(2b)} \\
= \;& \frac{i}{2}\int^{\Lambda}\frac{d^3\mathbf{l}}{(2\pi)^3}h^{ext}_{\alpha\beta}(\mathbf{l})h^{ext}_{\lambda\rho}(\mathbf{l}-\mathbf{k})V^{\alpha\beta,\mu\nu,\lambda\rho}(\ell,k,\ell-k)\frac{i\mathcal{P}_{\mu\nu,\sigma\tau}}{k^2}V^{\sigma\tau} \\
= \;& \frac{4\pi^2G^2M^2m^2}{|\mathbf{k}|}+\mathcal{O}(\Lambda).
\end{aligned}
$$

here we have used

$$
\begin{aligned}
& (\eta_{\alpha\beta}-2\delta^0_\alpha\delta^0_\beta)V^{\alpha\beta,\mu\nu,\lambda\rho}(\ell,k,\ell-k)(\eta_{\lambda\rho}-2\delta^0_\lambda\delta^0_\rho) \\
= \;& i\kappa[2(2\ell\cdot k-k^2-2\ell^2)\delta^\mu_0\delta^\nu_0 \\
& +2k^\mu k^\nu-2\ell^\mu\ell^\nu+k^\mu\ell^\nu+k^\nu\ell^\mu+(\ell^2-\ell\cdot k)\eta^{\mu\nu}]
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(\eta_{\alpha\beta}-2\delta^0_\alpha\delta^0_\beta)\,I^{\alpha\beta,\mu\nu} &= \eta^{\mu\nu}-2\delta^\mu_0\delta^\nu_0 \\
(\eta_{\alpha\beta}-2\delta^0_\alpha\delta^0_\beta)\,\eta^{\alpha\beta} &= 2 \\
(\eta_{\alpha\beta}-2\delta^0_\alpha\delta^0_\beta)\,\mathcal{P}^{\alpha\beta,\mu\nu} &= -2\delta^\mu_0\delta^\nu_0 \\
(\eta_{\lambda\sigma}-2\delta^0_\lambda\delta^0_\sigma)\,(\eta^{\sigma\rho}-2\delta^\sigma_0\delta^\rho_0) &= \delta^\rho_\lambda
\end{aligned}
$$

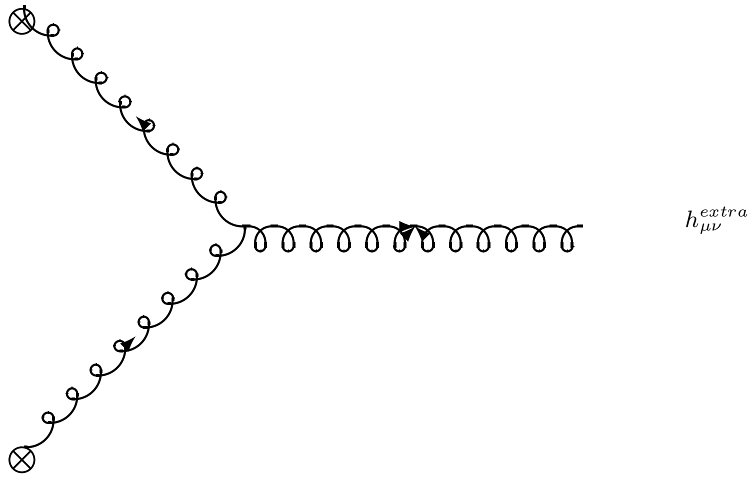
$$
\int\frac{d^3\mathbf{l}}{(2\pi)^3}\frac{1}{\mathbf{l}^2(\mathbf{l}-\mathbf{k})^2}=\frac{1}{8|\mathbf{k}|}
$$

♡ Interpretation of this result... In isotropic coodinates, Schwartzschild spacetime seems

$$
\begin{aligned}
g_{00} &= \left(\frac{1-\frac{GM}{2r}}{1+\frac{GM}{2r}}\right)^2 = 1-\frac{2GM}{r}+\frac{2G^2M^2}{r^2}+\dots \\
g_{ij} &= -\left(1+\frac{GM}{2r}\right)^4\delta_{ij} = -\left(1+\frac{2GM}{r}+\frac{3G^2M^2}{2r^2}+\dots\right)\delta_{ij}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\kappa h^{extra}_{00}(\mathbf{k}) &= 2G^2M^2\int d^3x\frac{e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}}{r^2}=\frac{4\pi^2G^2M^2}{|\mathbf{k}|} \\
\kappa h^{extra}_{ij}(\mathbf{k}) &= -\frac{3G^2M^2}{2}\delta_{ij}\int d^3x\frac{e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}}{r^2}=-\frac{3\pi^2G^2M^2}{|\mathbf{k}|}\delta_{ij}
\end{aligned}
$$

$$
i\mathcal{M}^{(1)}_{extra}=ih^{extra}_{\mu\nu}(\mathbf{k})V^{\mu\nu}=\frac{4\pi^2G^2M^2m^2}{|\mathbf{k}|}.
$$



7.3 PN (static)

scalar field をソースに用いた。詳細は省略。

$$
\begin{aligned}
& V(r) \\
= & \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} \left[\frac{i\mathcal{M}^{total}}{\sqrt{4E'E}} - \int \frac{d^3p''}{(2\pi)^3} \frac{\frac{i\mathcal{M}_G^{(1)}(\mathbf{p}',\mathbf{p}'')}{\sqrt{4E'E''}} \frac{i\mathcal{M}_G^{(1)}(\mathbf{p}'',\mathbf{p})}{\sqrt{4E''E}}}{E-E''} \right] \Bigg|_{E'=E} \\
\approx & \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} \left[-\frac{4\pi GMm}{\mathbf{k}^2} - i\frac{8\pi G^2M^2m^3}{|\mathbf{p}|\mathbf{k}^2} \ln\frac{|\mathbf{k}|}{\mu} \right. \\
& \left. -\frac{6\pi^2G^2M^2m}{|\mathbf{k}|} - \left(-i\frac{8\pi G^2M^2m^3}{|\mathbf{p}|\mathbf{k}^2} \ln\frac{|\mathbf{k}|}{\mu} - \frac{7\pi^2G^2M^2m}{|\mathbf{k}|} \right) \right]
\end{aligned}
$$

$$
V(r) = -\frac{GMm}{r} + \frac{G^2M^2m}{2r^2} + \cdots
$$

For two static masses in equal footing:

$$
V(r) = -\frac{Gm_1m_2}{r} + \frac{G^2m_1m_2(m_1+m_2)}{2c^2r^2} + \cdots
$$

agrees with Landau-Lifshitz!

なお，重力，電磁気力，ディラトン力の計算は，近日発表のわれわれの論文を見よ。

こんな計算法でなくても，Landau-Lifshitz みたいにできるわけだが，Loop correction もパラレルに計算できるのが良い点。といっても，難しさは一段上なので，⋯ 相当気を付けないと。一般的にはゴーストとかも要るし。期待される補正は，例えば

$$
const. \times \hbar \frac{G^2m_1m_2}{r^3} \tag{187}
$$

のようなもの。静的力の釣り合いがあるとき，量子補正を入れたモジュライ空間の計量を計算してみたいものだ。

8 Divergences in quantum field theory

8.1 QED

ファインマン図形に於いて
L: ループの数
I_e: 電子の内線の数
I_γ: 光子の内線の数
とする。
superficial degrees of divergence は

$$d = 4L - I_e - 2I_\gamma \tag{188}$$

である。

なぜならば，ループごとに運動量４次元積分，電子のプロパゲータは運動量の逆数，光子のプロパゲータは運動量の２乗の逆数の次元を持つので。

さて，オイラーの定理により

$$L = I_e + I_\gamma - V + 1 \tag{189}$$

であり，QED の頂点は１つの光子と２つの電子の線が一点につながるので

$$V = 2I_\gamma + E_\gamma = \frac{1}{2}(2I_e + E_e) \tag{190}$$

である。ただしここで E_γ，E_e はそれぞれ光子の外線の数，および電子の外線の数，である。以上より，

$$d = 4(I_e + I_\gamma - V + 1) - I_e - 2I_\gamma = 4 - E_\gamma - \frac{3}{2}E_e \tag{191}$$

と書き直せる。

このうまいところは，外線が少ない図形のみが危険で，外線が増えれば内線に関わらず安全だといえるところ。

有限個の発散は，繰り込める。

exercise
発散しそうな簡単な図形を書いてみそ。
また，D 次元では？($D = 2, 3, 5, 6, \ldots$)

8.2 Einstein gravity

For simplicity, we consider no external line.
物質場も無し。
superficial degrees of divergence は

$$d = 4L + 2V - 2I \tag{192}$$

である。ニュートン定数が次元を持つからだ。

オイラーの定理

$$L = I - V + 1 \tag{193}$$

により
$$d = 2(L+1) \tag{194}$$
となるから，ループが多ければどんどん発散が現れる。

on shell　では
$$R_{\mu\nu} = 0\,, \quad R = 0 \tag{195}$$
であり，
$$R_{\mu\nu\rho\sigma}R^{\mu\nu\rho\sigma} \tag{196}$$
は 4 次元では
$$\int d^4x\sqrt{-g}R_{\mu\nu\rho\sigma}R^{\mu\nu\rho\sigma} = \int d^4x\sqrt{-g}\left(4R_{\mu\nu}R^{\mu\nu} - R^2\right) \tag{197}$$
であるので，発散する項は one-loop では現れない。

しかし two-loop では
$$R^{\mu\nu}{}_{\rho\sigma}R^{\rho\sigma}{}_{\kappa\lambda}R^{\kappa\lambda}{}_{\mu\nu} \tag{198}$$
みたいな項が現れ，窮する。

8.3 higher derivative

元々から曲率の高次の項を認めれば，たとえばプロパゲータはモディファイされ
$$\frac{1}{k^2} + \frac{1}{k^2}\frac{\alpha k^4}{M^2}\frac{1}{k^2} + \frac{1}{k^2}\frac{\alpha k^4}{M^2}\frac{1}{k^2}\frac{\alpha k^4}{M^2}\frac{1}{k^2} + \cdots = \frac{1}{k^2 - \alpha k^4/M^2} \tag{199}$$
のごとくなり，less divergent (by power-counting due to propagator) により UV 発散が押さえられそうである。

しかし「ghosts」が現れる。
$$\frac{1}{k^2 - \alpha k^4/M^2} = \frac{1}{k^2}\frac{1}{1 - \alpha k^2/M^2} = \frac{1}{k^2} - \frac{1}{k^2 - M^2/\alpha} \tag{200}$$
符号の違いは，ユニタリティを破る。

9 Canonical quantization

9.1 ADM

$$ds^2 = \hat{g}_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu = -N^2dt^2 + g_{ij}(dx^i + N^i dt)(dx^j + N^j dt) \tag{201}$$
where $N^i = g^{ij}N_j$.
$$\hat{g}_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -N^2 + g^{ij}N_iN_j & N_i \\ N_j & g_{ij} \end{pmatrix} \tag{202}$$
力学変数は $N(t)$, $N_i(t,\mathbf{x})$, $g_{ij}(t,\mathbf{x})$ のつもりである。N はラプス，N_i はシフトと呼ばれる。
$$\hat{g}^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -N^{-2} & N^i/N^2 \\ N^j/N^2 & g^{ij} - N^iN^j/N^2 \end{pmatrix} \tag{203}$$

などなどにより Einstein-Hilbert action with the cosmological term は，表面項を除いて

$$\begin{aligned} S &= \frac{2}{\kappa^2}\int dt\, d^3\mathbf{x}\,\sqrt{g}N\,\left(K_{ij}K^{ij}-K^2+{}^{(3)}R-2\Lambda\right) \\ &= \frac{2}{\kappa^2}\int dt\, d^3\mathbf{x}\,\sqrt{g}N\left(K_{ij}\mathcal{G}^{ij;k\ell}K_{k\ell}+{}^{(3)}R-2\Lambda\right) \end{aligned} \tag{204}$$

と表される。ここで

$$K_{ij}=\frac{1}{2N}\left(\dot{g}_{ij}-\nabla_i N_j-\nabla_j N_i\right), \qquad K=K_{ij}g^{ij} \tag{205}$$

また

$$\mathcal{G}^{ij;k\ell}=\frac{1}{2}\left(g^{ik}g^{j\ell}+g^{i\ell}g^{jk}\right)-g^{ij}g^{k\ell} \tag{206}$$

である。

ちなみにその逆は

$$\mathcal{G}_{ij;k\ell}=\frac{1}{2}\left(g_{ik}g_{j\ell}+g_{i\ell}g_{jk}\right)-\frac{1}{2}g_{ij}g_{k\ell} \tag{207}$$

で

$$\mathcal{G}^{ij;k\ell}\mathcal{G}_{k\ell;mn}=\frac{1}{2}\left(\delta^i_m\delta^j_n+\delta^i_n\delta^j_m\right)=I^{ij;}{}_{mn} \tag{208}$$

を満たす。

さてでは正準共役量はというと

$$\pi^{ij}=\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_0 g_{ij})}=\frac{2}{\kappa^2}\sqrt{g}(K^{ij}-g^{ij}K)=\frac{2}{\kappa^2}\sqrt{g}\,\mathcal{G}^{ij;k\ell}K_{k\ell} \tag{209}$$

である。ちなみに

$$\pi\equiv g_{ij}\pi^{ij}=-\frac{4}{\kappa^2}\sqrt{g}K \tag{210}$$

である。後で用いる。

他の変数については

$$\pi_N=\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_0 N)}=0\,, \qquad \pi^i_N=\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_0 N_i)}=0 \tag{211}$$

となるので，この時点で拘束系（いや，ゲージ不変らしきところでもう見えている！）の量子化手続きが必要であることが察知される。

ハミルトニアン形式に進んでみよう。下記に注意する。

$$\begin{aligned} \pi^{ij}\partial_0 g_{ij} &= \pi^{ij}\left(2NK_{ij}+\nabla_i N_j+\nabla_j N_i\right) \\ &= \frac{2}{\kappa^2}\sqrt{g}(K^{ij}-g^{ij}K)(2NK_{ij})+\pi^{ij}\left(\nabla_i N_j+\nabla_j N_i\right) \\ &= \frac{4}{\kappa^2}N\sqrt{g}(K^{ij}K_{ij}-K^2)+2\pi^{ij}\nabla_i N_j \\ &= \kappa^2 N\frac{1}{\sqrt{g}}\left(\pi^{ij}\pi_{ij}-\frac{1}{2}\pi^2\right)+2\pi^{ij}\nabla_i N_j \end{aligned} \tag{212}$$

すると，アクションは下記のように書き換えられることがわかる。

$$S=\int dt\, d^3\mathbf{x}\left[\pi^{ij}\partial_0 g_{ij}-N\mathcal{H}-N_i\mathcal{H}^i-2\partial_i\left(N_j\pi^{ij}\right)+\partial_i\left(N^i\pi\right)\right]+\cdots \tag{213}$$

ここで

$$\mathcal{H} = \frac{\kappa^2}{2}\frac{1}{\sqrt{g}}\left(\pi_{ij}\pi^{ij}-\frac{1}{2}\pi^2\right)-\frac{2}{\kappa^2}\sqrt{g}({}^{(3)}R-2\Lambda)$$
$$= \frac{\kappa^2}{2}\frac{1}{\sqrt{g}}\left(\pi^{ij}\mathcal{G}_{ij;k\ell}\pi^{k\ell}\right)-\frac{2}{\kappa^2}\sqrt{g}({}^{(3)}R-2\Lambda)\,, \qquad (214)$$

$$\mathcal{H}^{\rangle} = -2\sqrt{g}\,\nabla_j\left(\frac{\pi^{ij}}{\sqrt{g}}\right) \qquad (215)$$

である。

The constraint equations are

$$\mathcal{H}=0\,, \qquad \mathcal{H}_i=0 \qquad (216)$$

Poisson brackets は

$$\left\{g_{ij}(t,\mathbf{x})\,,\pi^{k\ell}(t,\mathbf{x}')\right\}_{PB} = I_{ij;}{}^{k\ell}\text{“}\delta^3(\mathbf{x},\mathbf{x}')\text{”} \qquad (217)$$

のようになるであろう。ただしデルタ関数らしきものは曖昧にさせてもらった。[11]

The dynamical equations are

$$\partial_0 g_{ij} = \frac{\kappa^2}{\sqrt{g}}N\left(\pi_{ij}-\frac{1}{2}g_{ij}\pi\right)+\nabla_i N_j+\nabla_j N_i \qquad (218)$$

$$\partial_0\pi^{ij} = -\frac{2}{\kappa^2}N\sqrt{g}\left({}^{(3)}R^{ij}-\frac{1}{2}{}^{(3)}Rg^{ij}+\Lambda g^{ij}\right)$$
$$+\frac{\kappa^2}{4}\frac{1}{\sqrt{g}}Ng^{ij}\left(\pi_{k\ell}\pi^{k\ell}-\frac{1}{2}\pi^2\right)$$
$$-\frac{\kappa^2}{\sqrt{g}}N\left(\pi_{ki}\pi^{kj}-\frac{1}{2}\pi\pi^{ij}\right)$$
$$+\frac{2}{\kappa^2}\sqrt{g}\left(\nabla^i\nabla^j N-g^{ij}\nabla^2 N\right)$$
$$+\sqrt{g}\nabla_k\left(N^k\frac{\pi^{ij}}{\sqrt{g}}\right)-\pi^{ki}\nabla_k N^j-\pi^{kj}\nabla_k N^i \qquad (219)$$

where $\mathcal{H}^i=0$ is used.

9.2 Hořava-Lifshitz

9.2.1 Lifshitz theory

scaling

$$\mathbf{x}\to b\mathbf{x} \quad t\to b^z t \qquad (220)$$

$z=1$ for relativistic theory
$z=2$ Lifshitz scalar field

$$S=\int dt d^D\mathbf{x}\left\{\dot{\Phi}^2-\frac{1}{4}(\nabla^2\Phi)^2\right\} \qquad (221)$$

[11] 詳細略。それに少なくとも $g^{-1/2}$ みたいなのも付くよ。

relevant deformation $z=1$ in IR

$$-c^2\frac{1}{2}\int dt d^D\mathbf{x}\,\partial_i\Phi\partial_i\Phi = W \tag{222}$$

$$(\nabla^2\Phi)^2 = \left(\frac{\delta W}{\delta\Phi(\mathbf{x})}\right)^2 \tag{223}$$

Hamiltonian

$$H = \int d^D\mathbf{x}\left[P^2 + \frac{1}{4}\left(\frac{\delta W}{\delta\Phi(\mathbf{x})}\right)^2\right] \tag{224}$$

with $P(\mathbf{x}) = -i\frac{\delta}{\delta\Phi(\mathbf{x})}$

$$H = \int d^D\mathbf{x}\,\bar{\mathcal{Q}}\mathcal{Q}\,, \quad \mathcal{Q} = \frac{\delta}{\delta\Phi(\mathbf{x})} + \frac{1}{2}\frac{\delta W}{\delta\Phi(\mathbf{x})} \tag{225}$$

ground state

$$\mathcal{Q}\Psi_0[\Phi(\mathbf{x})] = \left(\frac{\delta}{\delta\Phi(\mathbf{x})} + \frac{1}{2}\frac{\delta W}{\delta\Phi(\mathbf{x})}\right)\Psi_0[\Phi(\mathbf{x})] = 0 \tag{226}$$

$$\Psi_0[\Phi(\mathbf{x})] = \exp\left\{-\frac{1}{2}W[\Phi(\mathbf{x})]\right\} = \exp\left\{-\frac{1}{4}\int d^D\mathbf{x}\,\partial_i\Phi\partial_i\Phi\right\} \tag{227}$$

$$\frac{1}{\omega^2 - c^2\mathbf{k}^2 - G(\mathbf{k}^2)^z} \tag{228}$$

UV $z=3$

$$\begin{aligned} &\frac{1}{\omega^2 - c^2\mathbf{k}^2 - G(\mathbf{k}^2)^z} \\ = \quad &\frac{1}{\omega^2 - G(\mathbf{k}^2)^z} + \frac{1}{\omega^2 - G(\mathbf{k}^2)^z}c^2\mathbf{k}^2\frac{1}{\omega^2 - G(\mathbf{k}^2)^z} + \cdots \end{aligned} \tag{229}$$

IR $z=1$

$$\begin{aligned} &\frac{1}{\omega^2 - c^2\mathbf{k}^2 - G(\mathbf{k}^2)^z} \\ = \quad &\frac{1}{\omega^2 - c^2\mathbf{k}^2} + \frac{1}{\omega^2 - c^2\mathbf{k}^2}G(\mathbf{k}^2)^z\frac{1}{\omega^2 - c^2\mathbf{k}^2} + \cdots \end{aligned} \tag{230}$$

9.2.2 Hořava-Lifshitz gravity

$$ds^2 = -N^2c^2dt^2 + g_{ij}(dx^i + N^i dt)(dx^j + N^j dt) \tag{231}$$

Anisotropic scaling

$$\mathbf{x} \to b\mathbf{x} \quad t \to b^z t \tag{232}$$

scaling dimension (in the unit of spatial momenta)

$$[\mathbf{x}] = -1\,, \quad [t] = -z\,, \quad [c] = [N_i] = z-1\,, \quad [g_{ij}] = [N] = 0 \tag{233}$$

Hořava-Lifshitz gravity is invariant under Foliation-preserving diffeomorphisms

$$\delta g_{ij} = \partial_i \zeta^k g_{jk} + \partial_j \zeta^k g_{ik} + \zeta^k \partial_k g_{ij} + f \dot{g}_{ij} \tag{234}$$

$$\delta N_i = \partial_i \zeta^j N_j + \zeta^j \partial_j N_i + \dot{\zeta}^j g_{ij} + \dot{f} N_i + f \dot{N}_i \tag{235}$$

$$\delta N = \zeta^j \partial_j N + \dot{f} N + f \dot{N} \tag{236}$$

where $\delta x^i = \zeta^i(t, \mathbf{x})$, $\delta t = f(t)$.
emergent Lorentz sym. $z = 1$ at IR

9.2.3 kinetic part

kinetic part is quadratic in $\dot{g}_{ij}$
$(1+D)$ dim

$$\begin{aligned} S_K &= \frac{2}{\kappa^2} \int dt\, d^D\mathbf{x}\, \sqrt{g} N\, K_{ij} \mathcal{G}^{ij;k\ell} K_{k\ell} \\ &= \frac{2}{\kappa^2} \int dt\, d^D\mathbf{x}\, \sqrt{g} N\, \left(K_{ij} K_{ij} - \lambda K^2 \right) \end{aligned} \tag{237}$$

where

$$\mathcal{G}^{ij;k\ell} = \frac{1}{2} \left(g^{ik} g^{j\ell} + g^{i\ell} g^{jk} \right) - \lambda g^{ij} g^{k\ell} \tag{238}$$

$$\mathcal{G}_{ij;k\ell} = \frac{1}{2} \left(g_{ik} g_{j\ell} + g_{i\ell} g_{jk} \right) + \frac{\lambda}{1 - 3\lambda} g_{ij} g_{k\ell} \tag{239}$$

$[\lambda] = 0$ $\lambda = 1$ for GR.
$[\kappa] = \frac{z-D}{2}$. κ is dimensionless for $z = D = 3$
$z = D = 3$, $[K_{ij} k^{ij}] = 6$.

9.2.4 potential part

potential part is independent of time derivatives.

$$S_{-V} = -\frac{2}{\kappa^2} \int dt\, d^D\mathbf{x} \sqrt{g} N\, V[g_{ij}] \tag{240}$$

dimension < 6:

$$\nabla_k R_{ij} \nabla^k R^{ij}\,, \quad \nabla_k R_{ij} \nabla^i R^{jk}\,, \quad R \nabla^2 R\,, \quad R^{ij} \nabla^2 R_{ij}\,,$$

(modify the propagator and interaction vertices)

$$R^3\,, \quad R_i^j R_j^k R_k^i\,, \quad R R_{ij} R^{ij}\,,$$

(modify interactions)
detailed balance condition

$$S_{-V} = -\frac{\kappa^2}{8} \int dt d^D\mathbf{x} \sqrt{g} N\, E^{ij} \mathcal{G}_{ij;k\ell} E^{k\ell}\,, \qquad E^{ij} = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\delta W[g_{k\ell}]}{\delta g_{ij}} \tag{241}$$

E^{ij} includes 3rd order spatial derivative.
Choose

$$W = \frac{1}{w^2} \int_\Sigma \omega_3(\Gamma)\,, \qquad \omega_3(\Gamma) = \mathrm{Tr} \left(\Gamma \wedge d\Gamma + \frac{2}{3} \Gamma \wedge \Gamma \wedge \Gamma \right) \tag{242}$$

then

$$
\begin{aligned}
S_{-V} &= -\frac{\kappa^2}{2w^4}\int dt\, d^3\mathbf{x}\sqrt{g}N\, C_{ij}C^{ij} \\
&= \frac{\kappa^2}{2w^4}\int dt d^3\mathbf{x}\sqrt{g}N\left(\nabla_i R_{jk}\nabla^i R^{jk} - \nabla_i R_{jk}\nabla^j R^{ik} - \frac{1}{8}\nabla_i R\nabla^i R\right)
\end{aligned}
\tag{243}
$$

where the cotton tensor

$$
C^{ij} = \frac{\epsilon^{ik\ell}}{\sqrt{g}}\nabla_k\left(R^j_\ell - \frac{1}{4}R\delta^j_\ell\right) \tag{244}
$$

The Cotton tensor ::

$$
C^{ij} = C^{ji} \qquad g_{ij}C^{ij} = 0\,, \qquad \nabla_i C^{ij} = 0 \tag{245}
$$

$$
g_{ij} \to \exp(2\Omega(\mathbf{x}))g_{ij} \qquad C^{ij} \to \exp(-5\Omega(\mathbf{x}))C^{ij} \tag{246}
$$

$$
S = S_K + S_{-V} \tag{247}
$$

has three dimensionless κ, λ, w.

$$
g_{ij} \to \exp(2\Omega(\mathbf{x}))g_{ij}\,, \quad N \to \exp(3\Omega(\mathbf{x}))N\,, \quad N_i \to \exp(2\Omega(\mathbf{x}))N_i \tag{248}
$$

$$
S = 2\int dt\, d^3\mathbf{x}\sqrt{g}N\left(\frac{1}{\kappa}K_{ij} - \frac{\kappa}{2w^2}C_{ij}\right)\mathcal{G}^{ij;k\ell}\left(\frac{1}{\kappa}K^{k\ell} - \frac{\kappa}{2w^2}C^{k\ell}\right) \tag{249}
$$

ground state

$$
\Psi_0[g_{ij}] = \exp\left\{-\frac{1}{2w^2}\int \mathrm{Tr}\left(\Gamma\wedge d\Gamma + \frac{2}{3}\Gamma\wedge\Gamma\wedge\Gamma\right)\right\} \tag{250}
$$

$$
\omega^2 \propto (\mathbf{k}^2)^3 \tag{251}
$$

9.2.5 deformation, z flows from three to one in IR

$$
W = \frac{1}{w^2}\int \omega_3(\Gamma) + \mu\int d^3\mathbf{x}\sqrt{g}(R - 2\Lambda_W) \tag{252}
$$

$$
[w] = 0\,, \qquad [\mu] = 1\,, \qquad [\Lambda_W] = 2 \tag{253}
$$

$$
\begin{aligned}
S_{HG} \quad = \quad & \int dt\, d^3\mathbf{x}\sqrt{g}N\left[\frac{2}{\kappa^2}\left(K^{ij}K_{ij} - \lambda K^2\right) - \frac{\kappa^2}{2w^4}C^{ij}C_{ij}\right. \\
& + \frac{\kappa^2\mu}{2w^2}\varepsilon^{ijk}R_{i\ell}\nabla_j R^\ell_k - \frac{\kappa^2\mu^2}{8}R_{ij}R^{ij} \\
& \left. + \frac{\kappa^2\mu^2}{8(1-3\lambda)}\left(\frac{1-4\lambda}{4}R^2 + \Lambda_W R - 3\Lambda_W^2\right)\right]
\end{aligned}
\tag{254}
$$

parity violating term.

$z = 3 \to z = 1$

$$S_{GR} = \frac{1}{16\pi G}\int dt\, d^3\mathbf{x}\sqrt{g}N\left(K^{ij}K_{ij} - K^2 + R - 2\Lambda\right) \tag{255}$$

$$x^0 = ct\,, \qquad [c] = 2 \tag{256}$$

$$c = \frac{\kappa^2\mu}{4}\sqrt{\frac{\Lambda_W}{1-3\lambda}}\,, \qquad G = \frac{\kappa^2}{32\pi c}\,, \qquad \Lambda = \frac{3}{2}\Lambda_W \tag{257}$$

negative cosmological constant.

10 Quantum cosmology

10.1 wave function

Poisson bracket can be interpreted by commutator of operators.

$$\left[\hat{g}_{ij}(t,\mathbf{x})\,,\hat{\pi}^{k\ell}(t,\mathbf{x}')\right] = i\hbar I_{ij;}{}^{k\ell}\,\text{“}\delta^3(\mathbf{x},\mathbf{x}')\text{”} \tag{258}$$

We omit the hats.

$$\pi^{k\ell} \to -i\hbar\frac{\delta}{\delta g_{k\ell}} \tag{259}$$

operators, operate on what?
wave function. Ψ

$$\hat{\mathcal{H}}\Psi(g_{jk}) = 0 \tag{260}$$

$$\hat{\mathcal{H}}^i\Psi(g_{jk}) = 0 \tag{261}$$

in general

$$\hat{\mathcal{H}}\Psi(g_{jk},\phi^a) = 0 \tag{262}$$

10.2 curvatures of isotropic homogeneous universe

four dimensions. $(-+++)$

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t)d\Omega_3^2 \tag{263}$$

$$R^{0i}{}_{0j} = \frac{\ddot{a}}{a}\delta^i_j\,, \qquad R^{ij}{}_{kl} = \frac{\dot{a}^2+k}{a^2}(\delta^i_k\delta^j_\ell - \delta^i_\ell\delta^j_k) \tag{264}$$

$$R^0_0 = 3\frac{\ddot{a}}{a}\delta^i_j\,, \qquad R^i_k = \left[\frac{\ddot{a}}{a} + 2\frac{\dot{a}^2+k}{a^2}\right]\delta^i_k \tag{265}$$

$$R = 6\frac{\ddot{a}}{a} + 6\frac{\dot{a}^2+k}{a^2} \tag{266}$$

$$ds^2 = -N^2dt^2 + a^2(t)d\Omega_3^2 \tag{267}$$

$$R = 6\frac{\ddot{a}}{N^2a} + 6\frac{\dot{a}^2}{N^2a^2} + 6\frac{k}{a^2} \tag{268}$$

Thus for $k=1$

$$\int d^4x\sqrt{-g}R = V_0\int dt\, Na^3\left(\frac{6}{a^2}-\frac{6\dot{a}^2}{N^2a^2}\right)+\cdots \tag{269}$$

$$K_{ij}=\frac{1}{2N}\left(\dot{g}_{ij}\right)=\frac{a\dot{a}}{N}\delta_{ij}\,,\qquad K=K_{ij}g^{ij}=3\frac{\dot{a}}{Na} \tag{270}$$

$$K_{ij}K^{ij}-K^2=3\frac{\dot{a}^2}{N^2a^2}-9\frac{\dot{a}^2}{N^2a^2}=-6\frac{\dot{a}^2}{N^2a^2}\,,\qquad {}^{(3)}R=\frac{6}{a^2} \tag{271}$$

10.3 action

$$S_{grav}=\frac{1}{2\kappa^2}\int d^4x\sqrt{-g}\,(R-2\Lambda)\ , \tag{272}$$

where $\kappa^2=8\pi G$.

$$S_{matter}=\int d^4x\sqrt{-g}\left[-\frac{1}{2}(\partial\phi)^2-V(\phi)\right]\ , \tag{273}$$

$$\begin{aligned} S &= S_{grav}+S_{matter} \\ &= \frac{3V_0}{\kappa^2}\int dt\, N\left(-\frac{a\dot{a}^2}{N^2}+ka-\frac{\Lambda a^3}{3}\right)+\frac{V_0}{2}\int dt\, Na^3\left(\frac{\dot{\phi}^2}{N^2}-2V(\phi)\right) \\ &\equiv V_0\int L\, dt\,. \end{aligned} \tag{274}$$

(used partial integration) $V_0=2\pi^2$ for $k=1$.

10.4 Hamiltonian

$$\pi_a=\frac{\partial L}{\partial\dot{a}}=-\frac{6a\dot{a}}{\kappa^2N}\,,\qquad \pi_\phi=\frac{\partial L}{\partial\dot{\phi}}=a^3\frac{\dot{\phi}}{N}\,,\qquad \pi_N=\frac{\partial L}{\partial\dot{N}}\approx 0\,, \tag{275}$$

where the last equation is primary constraint.

Hamiltonian

$$\begin{aligned} H &= \pi_a\dot{a}+\pi_\phi\dot{\phi}+\pi_N\dot{N}-L \\ &= N\left[-\frac{\kappa^2}{12a}\pi_a^2+\frac{1}{2}\frac{\pi_\phi^2}{a^3}+a^3\left\{\frac{\Lambda}{\kappa^2}+V(\phi)\right\}-\frac{3ka}{\kappa^2}\right] \end{aligned} \tag{276}$$

$H=0$ corresponds to the 0-0 component of the Einstein equation,

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2=\frac{\kappa^2}{3}\left(\frac{\dot{\phi}^2}{2}+V(\phi)\right)+\frac{\Lambda}{3}-\frac{k}{a^2}\,. \tag{277}$$

$$\mathcal{G}_{AB}=\begin{pmatrix} -\frac{6a}{\kappa^2} & 0 \\ 0 & a^3 \end{pmatrix} \tag{278}$$

$$H = N\left[\frac{1}{2}\mathcal{G}^{AB}\pi_A\pi_B + \mathcal{V}(q)\right] \approx 0 \tag{279}$$

WDW equation

$$\left[-\frac{\kappa^2}{12a}\pi_a^2 + \frac{1}{2}\frac{\pi_\phi^2}{a^3} + a^3\left\{\frac{\Lambda}{\kappa^2} + V(\phi)\right\} - \frac{3ka}{\kappa^2}\right]\Psi(a,\phi) = 0 \tag{280}$$

$$\frac{1}{a}\pi_a^2 \to -\hbar^2\frac{1}{a^2}\frac{\partial}{\partial a}\left(a^2\frac{1}{a}\frac{\partial}{\partial a}\right) \tag{281}$$

$$\left[\frac{\hbar^2\kappa^2}{12}a\frac{\partial}{\partial a}a\frac{\partial}{\partial a} - \frac{\hbar^2}{2}\frac{\partial^2}{\partial\phi^2} + a^6\left\{\frac{\Lambda}{\kappa^2} + V(\phi)\right\} - \frac{3ka^4}{\kappa^2}\right]\Psi(a,\phi) = 0 \tag{282}$$

$\kappa^2 = 8\pi G \to 6$

$$\left[\frac{\hbar^2}{2}a\frac{\partial}{\partial a}a\frac{\partial}{\partial a} - \frac{\hbar^2}{2}\frac{\partial^2}{\partial\phi^2} + a^6\left\{\frac{\Lambda}{6} + V(\phi)\right\} - \frac{ka^4}{2}\right]\Psi(a,\phi) = 0 \tag{283}$$

There is ambiguity in operator ordering. [12]

10.5 initial wave function

For $k = 1$

No Boundary

$$\Psi_{NB} = (a^2V(\phi) - 1)^{-1/4}\exp\left(\frac{1}{3V(\phi)}\right)\exp\left[\frac{(a^2V(\phi)-1)^{3/2}}{3V(\phi)} - \frac{\pi}{4}\right] \tag{285}$$

Tunneling

$$\Psi_T = (a^2V(\phi) - 1)^{-1/4}\exp\left(-\frac{1}{3V(\phi)}\right)\cos\left[-i\frac{(a^2V(\phi)-1)^{3/2}}{3V(\phi)}\right] \tag{286}$$

10.6 other special cases

$k = 0$, no cc and massless free scalar $\kappa^2 = 6$

$$\begin{aligned}\int L\,dt &= \frac{1}{2}\int dt\, Na^3\left(-\frac{\dot{a}^2}{N^2a^2} + \frac{\dot{\phi}^2}{N^2}\right) \\ &= \frac{1}{2}\int dt\, Ne^{3\alpha}\left(-\frac{\dot{\alpha}^2}{N^2} + \frac{\dot{\phi}^2}{N^2}\right).\end{aligned} \tag{287}$$

where $\alpha = \ln a$.

Classical solution:

$$\alpha = \frac{1}{3}\ln t + C', \qquad \phi = \frac{1}{3}\ln t. \tag{288}$$

[12]One may use

$$\left[\frac{\hbar^2\kappa^2}{12}\frac{1}{a}\frac{\partial}{\partial a}\frac{1}{a}\frac{\partial}{\partial a}a - \frac{\hbar^2}{2}\frac{1}{a^3}\frac{\partial^2}{\partial\phi^2} + a^3\left\{\frac{\Lambda}{\kappa^2} + V(\phi)\right\} - \frac{3ka}{\kappa^2}\right]\Psi(a,\phi) = 0 \tag{284}$$

WDW eq.

$$\left[-\frac{\partial^2}{\partial\alpha^2}+\frac{\partial^2}{\partial\phi^2}\right]\psi(\phi,\alpha)=0\,. \tag{289}$$

Wave packet

$$\psi(\phi,a)=a_1b_2\sigma\sqrt{\pi}\exp\left[-\frac{(\alpha-\phi)^2}{4}\right]\exp\left(id(\alpha-\phi)\right)\,. \tag{290}$$

11 Connection and form

11.1 vielbein, spin connection

coodinate basis

$$\hat{e}_\mu=\partial_\mu \tag{291}$$

local lorentz fram basis $\hat{e}_a$

$$g(\hat{e}_a,\hat{e}_b)=\eta_{ab} \tag{292}$$

vielbein e^a_μ

$$\hat{e}_\mu=e^a_\mu\hat{e}_a \tag{293}$$

$$g_{\mu\nu}e^\mu_a e^\nu_b=\eta_{ab} \tag{294}$$

$$g_{\mu\nu}=e^a_\mu e_{a\nu}=\eta_{ab}e^a_\mu e^b_\nu \tag{295}$$

$$\nabla_\mu X^a\equiv\partial_\mu X^a+\omega_\mu{}^a{}_b X^b \tag{296}$$

$$\nabla X=\nabla_\mu X^\nu dx^\mu\otimes\partial_\nu=(\partial_\mu X^\nu+\Gamma^\nu_{\mu\lambda}X^\lambda)dx^\mu\otimes\partial_\nu \tag{297}$$

$$\begin{aligned}\nabla X &= \nabla_\mu X^a dx^\mu\otimes\hat{e}_a=[\partial_\mu(e^a_\nu X^\nu)+\omega_\mu{}^a{}_b e^b_\nu X^\nu]dx^\mu\otimes e^\sigma_a\partial_\sigma\\ &= [e^a_\nu\partial_\mu X^\nu+(\partial_\mu e^a_\nu)X^\nu+\omega_\mu{}^a{}_b e^b_\nu X^\nu]dx^\mu\otimes e^\sigma_a\partial_\sigma\\ &= [\partial_\mu X^\sigma+(e^\sigma_a\partial_\mu e^a_\nu)X^\nu+e^\sigma_a\omega_\mu{}^a{}_b e^b_\nu X^\nu]dx^\mu\otimes\partial_\sigma\end{aligned} \tag{298}$$

Then

$$\Gamma^\nu_{\mu\lambda}=e^\nu_a e^b_\lambda\omega_\mu{}^a{}_b+e^\nu_a\partial_\mu e^a_\lambda \tag{299}$$

$$\omega_\mu{}^a{}_b=e^a_\nu e^\lambda_b\Gamma^\nu_{\mu\lambda}-e^\lambda_b\partial_\mu e^a_\lambda \tag{300}$$

$$\nabla_\mu e^a_\nu\equiv\partial_\mu e^a_\nu+\omega^a_{\mu b}e^b_\nu-\Gamma^\lambda_{\mu\nu}e^a_\lambda \tag{301}$$

$$\nabla_\mu e^a_\nu=\partial_\mu e^a_\nu+e^a_\sigma e^\lambda_b\Gamma^\sigma_{\mu\lambda}e^b_\nu-\partial_\mu e^a_\nu-\Gamma^\lambda_{\mu\nu}e^a_\lambda=0\,. \tag{302}$$

$$\begin{aligned}\nabla_\lambda g_{\mu\nu} &= \nabla_\lambda(e^a_\mu e_{a\nu})\\ &= \partial_\lambda(e^a_\mu e_{a\nu})-\Gamma^\rho_{\lambda\mu}e^a_\rho e_{a\nu}-\Gamma^\rho_{\lambda\nu}e^a_\mu e_{a\rho}\\ &= (\nabla_\lambda e^a_\mu)e_{a\nu}+e^a_\mu\nabla_\lambda e_{a\nu}-(\omega^{ab}_\lambda+\omega^{ba}_\lambda)e_{a\mu}e_{b\nu}\end{aligned} \tag{303}$$

metric compatible

$$\nabla_\lambda g_{\mu\nu}=0\Longleftrightarrow\nabla_\lambda e^a_\mu=0\quad and\quad\omega^{ab}_\lambda=-\omega^{ba}_\lambda \tag{304}$$

$$\nabla_\nu\eta_{ab}=0 \tag{305}$$

vielbein one-form and spin connection one-form

$$e^a \equiv e^a_\mu dx^\mu, \qquad \omega^{ab} \equiv \omega^{ab}_\mu dx^\mu \tag{306}$$

$$dx^\mu \wedge dx^\nu = -dx^\nu \wedge dx^\mu, \quad ddx^\mu = 0, \quad de^a = \partial_\nu e^a_\mu dx^\nu \wedge dx^\mu \tag{307}$$

$$T^a = de^a + \omega^a{}_b \wedge e^b \tag{308}$$
$$\Omega^a{}_b = d\omega^a{}_b + \omega^a{}_c \wedge \omega^c{}_b \tag{309}$$

$$dT^a + \omega^a{}_b \wedge T^b = \Omega^a{}_b \wedge e^b \tag{310}$$
$$d\Omega^a{}_b + \omega^a{}_c \wedge \Omega^c{}_b - \Omega^a{}_c \wedge \omega^c{}_b = 0 \tag{311}$$

$$T^\lambda_{\mu\nu} = e^\lambda_a T^a = e^\lambda_a(\partial_\mu e^a_\nu - \partial_\nu e^a_\mu + \omega^a_{\mu b} e^b_\nu - \omega^a_{\nu b} e^b_\mu) = \Gamma^\lambda_{\mu\nu} - \Gamma^\lambda_{\nu\mu} \tag{312}$$

Tortion free

$$T^a = de^a + \omega^a{}_b \wedge e^b = 0 \Longleftrightarrow \Gamma^\lambda_{\mu\nu} = \Gamma^\lambda_{\nu\mu} \tag{313}$$

11.2 curvature

$$\begin{aligned}[\nabla_\rho, \nabla_\sigma] e^a_\mu &= (\partial_\rho \omega_\sigma{}^a{}_b + \omega_\rho{}^a{}_c \omega_\sigma{}^c{}_b) e^b_\mu - \left(\partial_\rho \Gamma^\lambda_{\sigma\mu} - \Gamma^\tau_{\rho\mu}\Gamma^\lambda_{\sigma\tau}\right) e^a_\lambda \\ &\quad - (\rho \leftrightarrow \sigma) \\ &= (\partial_\rho \omega_\sigma{}^a{}_b - \partial_\sigma \omega_\rho{}^a{}_b + \omega_\rho{}^a{}_c \omega_\sigma{}^c{}_b - \omega_\sigma{}^a{}_c \omega_\rho{}^c{}_b) e^b_\mu \\ &\quad - \left(\partial_\rho \Gamma^\lambda_{\sigma\mu} - \partial_\sigma \Gamma^\lambda_{\rho\mu} + \Gamma^\tau_{\sigma\mu}\Gamma^\lambda_{\rho\tau} - \Gamma^\tau_{\rho\mu}\Gamma^\lambda_{\sigma\tau}\right) e^a_\lambda \end{aligned} \tag{314}$$

Since $[\nabla_\rho, \nabla_\sigma] e^a_\mu = 0$

$$\begin{aligned} &\partial_\rho \omega_\sigma{}^a{}_b - \partial_\sigma \omega_\rho{}^a{}_b + \omega_\rho{}^a{}_c \omega_\sigma{}^c{}_b - \omega_\sigma{}^a{}_c \omega_\rho{}^c{}_b \\ = \; & e^a_\mu e_{b\nu} R^{\mu\nu}{}_{\rho\sigma} = R^a{}_{b\rho\sigma}\,, \end{aligned} \tag{315}$$

where

$$R^\lambda{}_{\mu\rho\sigma} = \partial_\rho \Gamma^\lambda_{\sigma\mu} - \partial_\sigma \Gamma^\lambda_{\rho\mu} + \Gamma^\tau_{\sigma\mu}\Gamma^\lambda_{\rho\tau} - \Gamma^\tau_{\rho\mu}\Gamma^\lambda_{\sigma\tau}\,. \tag{316}$$

Finally

$$\Omega^a{}_b = d\omega^a{}_b + \omega^a{}_c \wedge \omega^c{}_b = \frac{1}{2} R^a{}_{b\rho\sigma} dx^\rho \wedge dx^\sigma \tag{317}$$

is curvature 2-form.

Summary:

$$\boxed{\begin{array}{c} de^a + \omega^a{}_b \wedge e^b = 0 \\ \Omega^a{}_b = d\omega^a{}_b + \omega^a{}_c \wedge \omega^c{}_b \end{array}}$$

11.3 examples

11.3.1 Robertson-Walker metric

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t)d\Omega_N^2 \tag{318}$$

$$e^0 = dt\,, \qquad e^A = a(t)\tilde{e}^A \tag{319}$$

where

$$d\tilde{e}^A + \tilde{\omega}^A{}_B \wedge \tilde{e}^B = 0\,, \tag{320}$$

and $A = 1, ..., N$

curvature 2-form

$$\tilde{\Omega}^A{}_B = d\tilde{\omega}^A{}_B + \tilde{\omega}^A{}_C \wedge \tilde{\omega}^C{}_B = k\,\tilde{e}^A \wedge \tilde{e}^B\,, \tag{321}$$

where $k = 1, 0, -1$

$$de^0 = 0\,, \qquad de^A = \dot{a}dt \wedge \tilde{e}^A + ad\tilde{e}^A = \frac{\dot{a}}{a}e^0 \wedge e^A - \tilde{\omega}^A{}_B \wedge e^B, \tag{322}$$

$$\omega^A{}_0 = \frac{\dot{a}}{a}e^A\,, \qquad \omega^A{}_B = \tilde{\omega}^A{}_B \tag{323}$$

curvature 2-form

$$\begin{aligned} \Omega^0{}_A &= d\omega^0{}_A + \omega^0{}_B \wedge \omega^B{}_A \\ &= d\left(\frac{\dot{a}}{a}e^A\right) + \frac{\dot{a}}{a}e^B \wedge \tilde{\omega}^B{}_A \\ &= \left[\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^{\cdot} + \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2\right] e^0 \wedge e^A = \frac{\ddot{a}}{a}e^0 \wedge e^A, \end{aligned} \tag{324}$$

$$\begin{aligned} \Omega^A{}_B &= d\omega^A{}_B + \omega^A{}_C \wedge \omega^C{}_B + \omega^A{}_0 \wedge \omega^0{}_B \\ &= \tilde{\Omega}^A{}_B + \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 e^A \wedge e^B = \frac{\dot{a}^2 + k}{a^2}e^A \wedge e^B. \end{aligned} \tag{325}$$

11.3.2 $(N+1)$ spherical metric

$$ds^2 = -e^{-2\delta}\Delta dt^2 + \frac{dr^2}{\Delta} + r^2 d\Omega_{N-1}^2 \tag{326}$$

Δ, δ is functions of r.

vielbein

$$e^0 = e^{-\delta}\sqrt{\Delta}dt\,, \qquad e^1 = \frac{1}{\sqrt{\Delta}}dr \tag{327}$$

$$e^A = r\tilde{e}^A\,, \qquad d\tilde{e}^A + \tilde{\omega}^A{}_B \wedge \tilde{e}^B = 0 \tag{328}$$

$A, B = 2, \ldots, N$

$$de^0 = \left(-\delta' + \frac{1}{2}\frac{\Delta'}{\Delta}\right) dr \wedge e^0 = \sqrt{\Delta}\left(-\delta' + \frac{1}{2}\frac{\Delta'}{\Delta}\right) e^1 \wedge e^0 \tag{329}$$

$$de^1 = 0\,, \quad de^A = \frac{1}{r}dr \wedge e^A + rd\tilde{e}^A = \frac{\sqrt{\Delta}}{r}e^1 \wedge e^A - \tilde{\omega}^A{}_B \wedge e^B \tag{330}$$

spin connection

$$\omega^0{}_1 = \sqrt{\Delta}\left(-\delta' + \frac{1}{2}\frac{\Delta'}{\Delta}\right)e^0\,, \quad \omega^A{}_1 = \frac{\sqrt{\Delta}}{r}e^A\,, \quad \omega^A{}_B = \tilde{\omega}^A{}_B \quad (331)$$

curvature 2-form

$$\begin{aligned}\Omega^0{}_1 &= d\omega^0{}_1 \\ &= -\left\{\sqrt{\Delta}\left[\sqrt{\Delta}\left(-\delta' + \frac{1}{2}\frac{\Delta'}{\Delta}\right)\right]' + \left[\sqrt{\Delta}\left(-\delta' + \frac{1}{2}\frac{\Delta'}{\Delta}\right)\right]^2\right\} e^0 \wedge e^1\end{aligned} \quad (332)$$

$$\begin{aligned}\Omega^A{}_1 &= d\omega^A{}_1 + \omega^A{}_B \wedge \omega^B{}_1 \\ &= -\left\{\sqrt{\Delta}\left[\frac{\sqrt{\Delta}}{r}\right]' + \left[\frac{\sqrt{\Delta}}{r}\right]^2\right\} e^A \wedge e^1\end{aligned} \quad (333)$$

$$\begin{aligned}\Omega^A{}_B &= d\omega^A{}_B + \omega^A{}_C \wedge \omega^C{}_B + \omega^A{}_1 \wedge \omega^1{}_B \\ &= \left\{\frac{1}{r^2} - \left[\frac{\sqrt{\Delta}}{r}\right]^2\right\} e^A \wedge e^B\end{aligned} \quad (334)$$

$$\Omega^0{}_A = \omega^0{}_1 \wedge \omega^1{}_A = -\left[\sqrt{\Delta}\left(-\delta' + \frac{1}{2}\frac{\Delta'}{\Delta}\right)\right]\left[\frac{\sqrt{\Delta}}{r}\right] e^0 \wedge e^A \quad (335)$$

Riemann tensor

$$R^{01}{}_{01} = -\left\{\sqrt{\Delta}\left[\sqrt{\Delta}\left(-\delta' + \frac{1}{2}\frac{\Delta'}{\Delta}\right)\right]' + \left[\sqrt{\Delta}\left(-\delta' + \frac{1}{2}\frac{\Delta'}{\Delta}\right)\right]^2\right\} \quad (336)$$

$$R^{A1}{}_{B1} = -\left\{\sqrt{\Delta}\left[\frac{\sqrt{\Delta}}{r}\right]' + \left[\frac{\sqrt{\Delta}}{r}\right]^2\right\}\delta^A_B \quad (337)$$

$$R^{AB}{}_{CD} = \left\{\frac{1}{r^2} - \left[\frac{\sqrt{\Delta}}{r}\right]^2\right\}\left(\delta^A_C\delta^B_D - \delta^A_D\delta^B_C\right) \quad (338)$$

$$R^{0A}{}_{0B} = -\left[\sqrt{\Delta}\left(-\delta' + \frac{1}{2}\frac{\Delta'}{\Delta}\right)\right]\left[\frac{\sqrt{\Delta}}{r}\right]\delta^A_B \quad (339)$$

Ricci tensor

$$\begin{aligned}R^0_0 &= R^{01}{}_{01} + R^{0A}{}_{0A} \\ &= -\left\{\sqrt{\Delta}\left[\sqrt{\Delta}\left(-\delta' + \frac{1}{2}\frac{\Delta'}{\Delta}\right)\right]' + \left[\sqrt{\Delta}\left(-\delta' + \frac{1}{2}\frac{\Delta'}{\Delta}\right)\right]^2\right\} \\ &- (N-1)\left[\sqrt{\Delta}\left(-\delta' + \frac{1}{2}\frac{\Delta'}{\Delta}\right)\right]\left[\frac{\sqrt{\Delta}}{r}\right]\end{aligned} \quad (340)$$

$$\begin{aligned}R^1_1 &= R^{01}{}_{01} + R^{A1}{}_{A1} \\ &= -\left\{\sqrt{\Delta}\left[\sqrt{\Delta}\left(-\delta' + \frac{1}{2}\frac{\Delta'}{\Delta}\right)\right]' + \left[\sqrt{\Delta}\left(-\delta' + \frac{1}{2}\frac{\Delta'}{\Delta}\right)\right]^2\right\} \\ &- (N-1)\left\{\sqrt{\Delta}\left[\frac{\sqrt{\Delta}}{r}\right]' + \left[\frac{\sqrt{\Delta}}{r}\right]^2\right\}\end{aligned} \quad (341)$$

$$
\begin{aligned}
R^A_B &= R^{0A}{}_{0B} + R^{A1}{}_{B1} + R^{AC}{}_{BC} \\
&= \left(- \left[\sqrt{\Delta} \left(-\delta' + \frac{1}{2}\frac{\Delta'}{\Delta} \right) \right] \left[\frac{\sqrt{\Delta}}{r} \right] \right. \\
&- \left\{ \sqrt{\Delta} \left[\frac{\sqrt{\Delta}}{r} \right]' + \left[\frac{\sqrt{\Delta}}{r} \right]^2 \right\} \\
&+ \left. (N-2) \left\{ \frac{1}{r^2} - \left[\frac{\sqrt{\Delta}}{r} \right]^2 \right\} \right) \delta^A_B
\end{aligned} \tag{342}
$$

scalar curvature

$$
\begin{aligned}
R &= -2 \left\{ \sqrt{\Delta} \left[\sqrt{\Delta} \left(-\delta' + \frac{1}{2}\frac{\Delta'}{\Delta} \right) \right]' + \left[\sqrt{\Delta} \left(-\delta' + \frac{1}{2}\frac{\Delta'}{\Delta} \right) \right]^2 \right\} \\
&- 2(N-1) \left[\sqrt{\Delta} \left(-\delta' + \frac{1}{2}\frac{\Delta'}{\Delta} \right) \right] \left[\frac{\sqrt{\Delta}}{r} \right] \\
&- 2(N-1) \left\{ \sqrt{\Delta} \left[\frac{\sqrt{\Delta}}{r} \right]' + \left[\frac{\sqrt{\Delta}}{r} \right]^2 \right\} \\
&+ (N-1)(N-2) \left\{ \frac{1}{r^2} - \left[\frac{\sqrt{\Delta}}{r} \right]^2 \right\}
\end{aligned} \tag{343}
$$

$$
\begin{aligned}
G^0_0 &= (N-1) \left\{ \sqrt{\Delta} \left[\frac{\sqrt{\Delta}}{r} \right]' + \left[\frac{\sqrt{\Delta}}{r} \right]^2 \right\} \\
&- \frac{(N-1)(N-2)}{2} \left\{ \frac{1}{r^2} - \left[\frac{\sqrt{\Delta}}{r} \right]^2 \right\}
\end{aligned} \tag{344}
$$

$$
\begin{aligned}
G^0_0 - G^1_1 &= R^0_0 - R^1_1 \\
&= -(N-1) \left[\sqrt{\Delta} \left(-\delta' + \frac{1}{2}\frac{\Delta'}{\Delta} \right) \right] \left[\frac{\sqrt{\Delta}}{r} \right] \\
&+ (N-1) \left\{ \sqrt{\Delta} \left[\frac{\sqrt{\Delta}}{r} \right]' + \left[\frac{\sqrt{\Delta}}{r} \right]^2 \right\}
\end{aligned} \tag{345}
$$

$$
G^0_0 = \frac{N-1}{2r}\Delta' + \frac{(N-1)(N-2)}{2}\frac{\Delta - 1}{r^2} \tag{346}
$$

$$
G^0_0 - G^1_1 = \Delta \frac{N-1}{r}\delta' \tag{347}
$$

Einstein equation

$$
G^\mu_\nu = R^\mu_\nu - \frac{1}{2} R \delta^\mu_\nu = 8\pi G T^\mu_\nu \tag{348}
$$

$(N+1)$ dimensions

$$
R^\mu_\nu = 8\pi G \left(T^\mu_\nu - \frac{1}{N-1} T \delta^\mu_\nu \right) \tag{349}
$$

(perfect fluid)

$$T^\mu_\nu = diag.\,(-\rho, P, P, \cdots, P) \tag{350}$$

$$T = T^\mu_\mu = -\rho + NP \tag{351}$$

$$\begin{aligned} G^0_0 &= -8\pi G\rho & (352) \\ G^0_0 - G^1_1 &= -8\pi G\,(\rho + P) & (353) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{N-1}{2r}\Delta' + \frac{(N-1)(N-2)}{2}\frac{\Delta - 1}{r^2} &= -8\pi G\rho & (354) \\ \Delta\left[\frac{N-1}{r}\delta'\right] &= -8\pi G\,(\rho + P) & (355) \end{aligned}$$

conservation

$$\nabla_\lambda T^{\mu\nu} = \partial_\lambda T^{\mu\nu} + \Gamma^\mu_{\lambda\sigma}T^{\sigma\nu} + \Gamma^\nu_{\lambda\sigma}T^{\mu\sigma} \tag{356}$$

$$\begin{aligned} \nabla_\mu T^{\mu\nu} &= \partial_\mu T^{\mu\nu} + \Gamma^\mu_{\mu\sigma}T^{\sigma\nu} + \Gamma^\nu_{\mu\sigma}T^{\mu\sigma} \\ &= \frac{1}{\sqrt{-g}}\partial_\mu\left(\sqrt{-g}T^{\mu\nu}\right) + \Gamma^\nu_{\mu\sigma}T^{\mu\sigma} & (357) \end{aligned}$$

$$\frac{1}{\sqrt{-g}}\partial_\mu\sqrt{-g} = \frac{1}{2}g^{\lambda\sigma}\partial_\mu g_{\lambda\sigma} = \Gamma^\lambda_{\mu\lambda} \tag{358}$$

$$T^{tt} = \frac{1}{e^{-2\delta}\Delta}\rho\,, \quad T^{rr} = \Delta P\,, \quad T^{ij} = \frac{1}{r^2}\tilde{g}^{ij}P\,. \tag{359}$$

$$\begin{aligned} \Gamma^r_{tt} &= e^{-2\delta}\Delta^2\left(-\delta' + \frac{1}{2}\frac{\Delta'}{\Delta}\right)\,, \quad \Gamma^r_{rr} = -\frac{1}{2}\frac{\Delta'}{\Delta} & (360) \\ \Gamma^r_{ij} &= -\Delta r\tilde{g}_{ij} & (361) \end{aligned}$$

$$\nabla_\mu T^{\mu r} = 0 \quad \Rightarrow \quad P' + \left(-\delta' + \frac{1}{2}\frac{\Delta'}{\Delta}\right)(\rho + P) = 0 \tag{362}$$

$$-P' = \frac{8\pi G}{(N-1)\Delta}r\left(\frac{(N-1)(N-2)}{16\pi G}\frac{1-\Delta}{r^2} + P\right)(\rho + P) \tag{363}$$

$$\Delta = 1 - \frac{16\pi G M_r}{(N-1)A_{N-1}r^{N-2}} \tag{364}$$

$$-P' = \frac{8\pi G r}{(N-1)\left(1 - \frac{16\pi G M_r}{(N-1)A_{N-1}r^{N-2}}\right)}\left(\frac{(N-2)M_r}{A_{N-1}r^N} + P\right)(\rho + P) \tag{365}$$

$$-P' = \frac{8\pi G(N-2)M_r}{(N-1)A_{N-1}r^{N-1}}\rho \tag{366}$$

$$M_r(r) = A_{N-1}\int_0^r \rho(r){r'}^{N-1}dr' \,, \quad A_{N-1} = \frac{2\pi^{N/2}}{\Gamma\left(N/2\right)} \tag{367}$$

$$ds^2 = -e^{-2\delta}\Delta dt^2 + \frac{dr^2}{\Delta} + r^2 d\Omega_{N-1}^2 \tag{368}$$

$$d\Omega_{N-1}^2 = \tilde{g}_{ij}d\tilde{x}^i\tilde{x}^j \qquad (i,j=2,\ldots,N) \tag{369}$$

$$\begin{aligned}
\Gamma^t_{rt} &= -\delta' + \frac{1}{2}\frac{\Delta'}{\Delta}\,, \qquad \Gamma^r_{tt} = e^{-2\delta}\Delta^2\left(-\delta' + \frac{1}{2}\frac{\Delta'}{\Delta}\right) && (370)\\
\Gamma^r_{rr} &= -\frac{1}{2}\frac{\Delta'}{\Delta}\,, \quad \Gamma^r_{ij} = -\Delta r\tilde{g}_{ij}\,, \quad \Gamma^i_{rj} = \frac{1}{r}\delta^i_j\,, \quad \Gamma^i_{jk} = \tilde{\Gamma}^i_{jk} && (371)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Gamma^\lambda_{t\lambda} &= 0\,, \quad \Gamma^\lambda_{r\lambda} = \Gamma^t_{rt} + \Gamma^r_{rr} + \Gamma^k_{rk} = -\delta' + \frac{N-1}{r} && (372)\\
\Gamma^\lambda_{i\lambda} &= \tilde{\Gamma}^k_{ik} && (373)
\end{aligned}$$

$$R_{\sigma\nu} = \partial_\lambda\Gamma^\lambda_{\nu\sigma} - \partial_\nu\Gamma^\lambda_{\sigma\lambda} + \Gamma^\lambda_{\rho\lambda}\Gamma^\rho_{\nu\sigma} - \Gamma^\lambda_{\nu\rho}\Gamma^\rho_{\sigma\lambda} \tag{374}$$

$$\begin{aligned}
R_{tt} &= \partial_r\Gamma^r_{tt} - 0 + \Gamma^r_{tt}\Gamma^\lambda_{r\lambda} - 2\Gamma^r_{tt}\Gamma^t_{tr}\\
&= \left[e^{-2\delta}\Delta^2\left(-\delta' + \frac{1}{2}\frac{\Delta'}{\Delta}\right)\right]'\\
&+ e^{-2\delta}\Delta^2\left(-\delta' + \frac{1}{2}\frac{\Delta'}{\Delta}\right)\left[-\delta' + \frac{N-1}{r}\right]\\
&- 2e^{-2\delta}\Delta^2\left(-\delta' + \frac{1}{2}\frac{\Delta'}{\Delta}\right)^2\\
&= e^{-2\delta}\Delta^2\left(-\delta' + \frac{1}{2}\frac{\Delta'}{\Delta}\right)'\\
&+ e^{-2\delta}\Delta^2\left(-\delta' + \frac{1}{2}\frac{\Delta'}{\Delta}\right)\left[-\delta' + \frac{N-1}{r} + \frac{\Delta'}{\Delta}\right] && (375)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
R_{rr} &= \partial_r\Gamma^r_{rr} - \partial_r\Gamma^\lambda_{r\lambda} + \Gamma^r_{rr}\Gamma^\lambda_{r\lambda} - \left({\Gamma^t_{rt}}^2 + {\Gamma^r_{rr}}^2 + \Gamma^i_{rj}\Gamma^j_{ri}\right)\\
&= \left(-\frac{1}{2}\frac{\Delta'}{\Delta}\right)' - \left[-\delta' + \frac{N-1}{r}\right]' + \left(-\frac{1}{2}\frac{\Delta'}{\Delta}\right)\left[-\delta' + \frac{N-1}{r}\right]\\
&- \left(-\delta' + \frac{1}{2}\frac{\Delta'}{\Delta}\right)^2 - \left(-\frac{1}{2}\frac{\Delta'}{\Delta}\right)^2 - \frac{N-1}{r^2}\\
&= -\left[-\delta' + \frac{N-1}{r} + \frac{1}{2}\frac{\Delta'}{\Delta}\right]' + \left(-\frac{1}{2}\frac{\Delta'}{\Delta}\right)\left[-\delta' + \frac{N-1}{r} + \frac{1}{2}\frac{\Delta'}{\Delta}\right]\\
&- \left(-\delta' + \frac{1}{2}\frac{\Delta'}{\Delta}\right)^2 - \frac{N-1}{r^2} && (376)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
R_{ij} &= \partial_r \Gamma^r_{ij} + \partial_k \Gamma^k_{ij} - \partial_i \Gamma^\lambda_{j\lambda} + \Gamma^r_{ij}\Gamma^\lambda_{r\lambda} + \Gamma^k_{ij}\Gamma^\lambda_{k\lambda} - \left(2\Gamma^k_{ri}\Gamma^r_{jk} + \Gamma^k_{\ell i}\Gamma^\ell_{jk}\right) \\
&= [-\Delta r]'\,\tilde{g}_{ij} + \partial_k \tilde{\Gamma}^k_{ij} - \partial_i \tilde{\Gamma}^k_{jk} + [-\Delta r]\left[-\delta' + \frac{N-1}{r}\right]\tilde{g}_{ij} \\
&+ \tilde{\Gamma}^k_{ij}\tilde{\Gamma}^\ell_{k\ell} - 2\,[-\Delta]\,\tilde{g}_{ij} - \tilde{\Gamma}^k_{\ell i}\tilde{\Gamma}^\ell_{jk} \\
&= \tilde{R}_{ij} - \Delta r\left[-\delta' + \frac{N-2}{r} + \frac{\Delta'}{\Delta}\right]\tilde{g}_{ij} \qquad (377)
\end{aligned}
$$

11.3.3 canonical metric

$(3+1)$ dimensions

$$ds^2 = -N^2 dt^2 + g_{ij}(dx^i + N^i dt)(dx^j + N^j dt) \qquad (378)$$

$i, j = 1, 2, 3,\ N(t)$

$$\hat{e}^0 = N dt\,, \qquad \hat{e}^a = e^a + N^a dt \qquad (a = 1, 2, 3) \qquad (379)$$

where $e^a = e^a_i dx^i$, $N^a = e^a_i N^i$

$$d\hat{e}^0 = 0 \qquad (380)$$

$$
\begin{aligned}
d\hat{e}^a &= -\partial_0 e^a \wedge dt - \omega^a{}_b \wedge e^b + \partial_i N^a dx^i \wedge dt \\
&= -\partial_0 e^a \wedge dt - \omega^a{}_b \wedge \hat{e}^b + \partial_i N^a dx^i \wedge dt + \omega^a{}_b N^b \wedge dt \\
&= -\partial_0 e^a \wedge dt - \omega^a{}_b \wedge \hat{e}^b + \frac{1}{N}\nabla_c N^a \hat{e}^c \wedge \hat{e}^0 \qquad (381)
\end{aligned}
$$

where $\nabla_c N^a \equiv e^i_c(\partial_i N^a + \omega^a{}_{bi} N^b)$.

Compare

$$
\begin{aligned}
d\hat{e}^0 &= 0 \qquad (382) \\
d\hat{e}^a + \omega^a{}_b \wedge \hat{e}^b - \frac{1}{N}\nabla_c N^a \hat{e}^c \wedge \hat{e}^0 + \frac{1}{N}\partial_0 e^a \wedge \hat{e}^0 &= 0 \qquad (383)
\end{aligned}
$$

with

$$
\begin{aligned}
d\hat{e}^0 + \hat{\omega}^0{}_a \wedge \hat{e}^a &= 0 \qquad (384) \\
d\hat{e}^a + \hat{\omega}^a{}_b \wedge \hat{e}^b + \hat{\omega}^a{}_0 \wedge \hat{e}^0 &= 0 \qquad (385)
\end{aligned}
$$

sol.

$$
\begin{aligned}
\hat{\omega}^{ab} &= \omega^{ab} - \frac{1}{2N} g^{ij}(\partial_0 e^a_i e^b_j - \partial_0 e^b_i e^a_j)\hat{e}^0 - \frac{1}{2N}(\nabla^a N^b - \nabla^b N^a)\hat{e}^0 \\
&= \omega^{ab} + S^{ab}\hat{e}^0 \qquad (S^{ab} = -S^{ba}) \qquad (386) \\
\hat{\omega}^a{}_0 &= \frac{1}{2N} g^{ij}(\partial_0 e^a_i e^b_j + \partial_0 e^b_i e^a_j)\hat{e}^b - \frac{1}{2N}(\nabla^a N^b + \nabla^b N^a)\hat{e}^b \\
&= K^{ab}\hat{e}^b \qquad (K^{ab} = K^{ba}) \qquad (387)
\end{aligned}
$$

Here

$$e^{ai}e^{bj}\partial_0 g_{ij} = e^{ai}e^{bj}\left(\partial_0 e^c_i e^c_j + \partial_0 e^c_j e^c_i\right) = e^{ai}\partial_0 e^b_i + e^{bj}\partial_0 e^a_j \qquad (388)$$

$$K^{ab} = e^{ai}e^{bj}K_{ij} \qquad (389)$$

where

$$K_{ij} = \frac{1}{2N}\left(\partial_0 g_{ij} - \nabla_i N_j - \nabla_j N_i\right) \tag{390}$$

is called extrinsic curvature.

$$\hat{\Omega}^a{}_b = d\hat{\omega}^a{}_b + \hat{\omega}^a{}_c \wedge \hat{\omega}^c{}_b + \hat{\omega}^a{}_0 \wedge \hat{\omega}^0{}_b \tag{391}$$

$$\hat{\Omega}^a{}_0 = d\hat{\omega}^a{}_0 + \hat{\omega}^a{}_b \wedge \hat{\omega}^b{}_0 \tag{392}$$

$$\hat{\Omega}^{AB} = \frac{1}{2}\hat{R}^{AB}{}_{CD}\hat{e}^C \wedge \hat{e}^D \tag{393}$$

$$\hat{R} = \hat{R}^{AB}{}_{AB} = \hat{R}^{ab}{}_{ab} + 2\hat{R}^{0a}{}_{0a} \tag{394}$$

Therefore we need only $\hat{R}^{ab}{}_{cd}$ and $\hat{R}^{a0}{}_{c0}$

$$\hat{R}^{ab}{}_{cd} = R^{ab}{}_{cd} + K^a_c K^b_d - K^a_d K^b_c \tag{395}$$

$$\begin{aligned} d\hat{\omega}^{a0} &= -\frac{1}{N}\partial_0 K^{ab}\hat{e}^0 \wedge \hat{e}^b - \partial_c K^{ab} e^c \wedge \hat{e}^b \\ &\quad + K^{ab}\hat{\omega}^{bc} \wedge \hat{e}^c + K^{ab}K^{bc}\hat{e}^c \wedge \hat{e}^0 + \cdots \\ &= \frac{1}{N}\partial_0 K^{ab}\hat{e}^b \wedge \hat{e}^0 - \partial_c K^{ab}\hat{e}^c \wedge \hat{e}^b + \frac{1}{N}(\partial_c K^{ab})N^c \hat{e}^0 \wedge \hat{e}^b \\ &\quad - K^{ab}S^{bc}\hat{e}^c \wedge \hat{e}^0 + K^{ab}K^{bc}\hat{e}^c \wedge \hat{e}^0 + \cdots \end{aligned} \tag{396}$$

$$\hat{R}^{a0}{}_{b0} = S^{ac}K_{cb} - K^{ac}S_{cb} + K^{ac}K_{cb} + \frac{1}{N}\partial_0 K^a_b - \frac{1}{N}(\partial_c K^a_b)N^c \tag{397}$$

Finally according to (394) we get

$$\int d^4x \sqrt{-\hat{g}}\hat{R} = \int dt\, d^3\mathbf{x}\, \left[N\sqrt{g}\left(R + K^{ij}K^{ij} - K^2\right) - 2\partial_i(\sqrt{g}KN^i)\right] \tag{398}$$

where $K = K_{ij}g^{ij}$. Note that R is the scalar curvature constructed from g_{ij}. Here we used $\partial_0\sqrt{g} = \frac{1}{2}\sqrt{g}g^{ij}\partial_0 g_{ij}$ and $\nabla_i N^i = \frac{1}{\sqrt{g}}\partial_i(\sqrt{g}N^i)$.

11.4 action in first order formalism

in four dimensions

$$EH: \qquad \int \varepsilon_{ABCD}\Omega^{AB} \wedge e^C \wedge e^D \tag{399}$$

$$CC: \qquad \int \varepsilon_{ABCD} e^A \wedge e^B \wedge e^C \wedge e^D \tag{400}$$

$$GB: \qquad \int \varepsilon_{ABCD}\Omega^{AB} \wedge \Omega^{CD} \tag{401}$$

possible generalizations

12 3DGR

12.1 action and symmetry

action

$$S = \frac{1}{8\pi G}\int_M \left(e^a \wedge \Omega_a + \frac{\Lambda}{6}\varepsilon_{abc}e^a \wedge e^b \wedge e_c\right) \tag{402}$$

where

$$\Omega^a = d\omega^a + \frac{1}{2}\varepsilon^{abc}\omega_b \wedge \omega_c \tag{403}$$

with

$$\omega^a = \frac{1}{2}\varepsilon^{abc}\omega_{bc} \tag{404}$$

eom leads to the next two eqs.
♡ torsion free

$$T^a = de^a + \varepsilon_{abc}\omega^b \wedge e^c = 0 \tag{405}$$

($\wedge$ is often omitted, such as $de^a + \omega^a{}_b e^b = 0$.)
♡ Einstein eq.

$$\Omega_a = -\frac{\Lambda}{2}\varepsilon_{abc}e^b \wedge e^c \qquad (\Omega^a = \frac{1}{2}\varepsilon^{abc}\Omega_{bc}) \tag{406}$$

$$\Omega^{ab} = -\Lambda e^a \wedge e^b \tag{407}$$

The action is invariant under the next two transformations:
local Lorentz

$$\delta e^a = \varepsilon^{abc}e_b\tau_c\,, \qquad \delta\omega^a = d\tau^a + \varepsilon^{abc}\omega_b\tau_c\,, \tag{408}$$

local translation

$$\delta e^a = d\sigma^a + \varepsilon^{abc}\omega_b\sigma_c\,, \qquad \delta\omega^a = -\Lambda\varepsilon^{abc}e_b\sigma_c \tag{409}$$

12.2 CS action

Chern-Simons

$$S_{CS}[A] = \frac{k}{4\pi}\int_M \mathrm{Tr}\left(A \wedge dA + \frac{2}{3}A \wedge A \wedge A\right) \tag{410}$$

eom

$$F = dA + A \wedge A = 0 \tag{411}$$

invariance under the transformation

$$\delta A = d\Phi + [A, \Phi] \tag{412}$$

12.2.1 $\Lambda = 0$

$ISO(2,1)$

$$[\mathcal{J}^a, \mathcal{J}^b] = \varepsilon^{abc}\mathcal{J}_c\,, \quad [\mathcal{J}^a, \mathcal{P}^b] = \varepsilon^{abc}\mathcal{P}_c\,, \quad [\mathcal{P}^a, \mathcal{P}^b] = 0 \tag{413}$$

$$\mathrm{Tr}(\mathcal{J}^a\mathcal{P}^b) = \eta^{ab}\,, \quad \mathrm{Tr}(\mathcal{J}^a\mathcal{J}^b) = \mathrm{Tr}(\mathcal{P}^a\mathcal{P}^b) = 0 \tag{414}$$

$$A = e^a\mathcal{P}_a + \omega^a\mathcal{J}_a \tag{415}$$

$$S_{\Lambda=0} \propto S_{CS}[A] \tag{416}$$

$$\delta A = \delta e^a\mathcal{P}_a + \delta\omega^a\mathcal{J}_a \tag{417}$$

$$\delta A = d\Phi + [A, \Phi] \tag{418}$$

where $\Phi = \sigma^a\mathcal{P}_a + \tau^a\mathcal{J}_a$

12.2.2 $\Lambda < 0$

$$S_{\Lambda<0} = S_{CS}[A_+] - S_{CS}[A_-] \tag{419}$$

where

$$A_+ = \left(\omega^a + \frac{1}{\ell}e^a\right)T^a\,, \quad A_- = \left(\omega^a - \frac{1}{\ell}e^a\right)T^a \tag{420}$$

where $\Lambda = -1/\ell^2$, $T^a \in sl(2,R)$??? $SO(2,1)\times SO(2,1)$
$k = \frac{\ell}{4G}$

12.2.3 $\Lambda > 0$

$SL(2,\mathbf{C})$

$$A^a = \omega^a + i\sqrt{\Lambda}e^a \tag{421}$$

$$S_{\Lambda>0} = S_{CS}[A] \tag{422}$$

12.3 Massive 3D gravity

- Topological (Deser, Jackiw, Templeton '82)
- New [NMG] (Bergshoeff, Hohm, Townsend '09)
- General [GMG] (Bergshoeff, Hohm, Townsend '09)
- Cosmological General [CGMG] (Bergshoeff, Hohm, Townsend '09)

General $(m,\,\mu) \overset{m\to\infty}{\longrightarrow}$ Topological (μ)
General $(m,\,\mu) \overset{\mu\to\infty}{\longrightarrow}$ New (m)

12.3.1 Spin 1 analogy

Proca

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} + \frac{1}{2}m^2 A^\mu A_\mu \tag{423}$$

eom

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} + m^2 A^\nu = 0 \tag{424}$$

is rewritten as

$$\left(\mathcal{O}(-m)\mathcal{O}(m)\right)_\mu{}^\nu A_\nu = 0 \tag{425}$$

with

$$\mathcal{O}_\mu{}^\nu(m) = m\delta_\mu^\nu + \varepsilon_\mu{}^{\tau\nu}\partial_\tau \tag{426}$$

Alowing parity violaton (helicity does not appear as twin), eom could come from

$$\mathcal{O}_\mu{}^\nu(m)A_\nu = 0 \Rightarrow mA_\mu = \varepsilon_\mu{}^{\nu\rho}F_{\nu\rho} \tag{427}$$

$$S = -\frac{1}{2}\int d^3x\left(\varepsilon^{\mu\nu\rho}A_\mu\partial_\nu A_\rho + mA^\mu A_\mu\right) \tag{428}$$

An equivalent form

$$S = \int d^3x\left(-\frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} + \frac{m}{2}\varepsilon^{\mu\nu\rho}A_\mu\partial_\nu A_\rho\right) \tag{429}$$

1 dof.

Now two mass scale

$$\left(\mathcal{O}(-m_+)\mathcal{O}(m_-)\right)_\mu{}^\nu A_\nu = 0 \tag{430}$$

$$S = \int d^3x\left(-\frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} + \frac{\mu}{2}\varepsilon^{\mu\nu\rho}A_\mu\partial_\nu A_\rho + \frac{m^2}{2}A^\mu A_\mu\right) \tag{431}$$

with $\mu = 2(m_+ - m_-)$ and $m^2 = m_+ m_-$.

Of course $m_+ = m_-$ gives Proca.

dual field

$$F_\mu \equiv \varepsilon_\mu{}^{\nu\rho}\partial_\nu A_\rho = \frac{1}{2}\varepsilon_\mu{}^{\nu\rho}F_{\nu\rho} \tag{432}$$

possible higher-derivative Maxwell

$$\mathcal{L} \sim m\varepsilon^{\mu\nu\rho}A_\mu\partial_\nu A_\rho + \varepsilon^{\mu\nu\rho}F_\mu\partial_\nu F_\rho \tag{433}$$

12.3.2 pure gravity

$$\mathcal{L} \sim h^{\mu\nu}\mathcal{G}_{\mu\nu}(h)\,, \qquad \mathcal{G}_{\mu\nu}(h) = \frac{1}{2}\varepsilon_{(\mu}{}^{\eta\rho}\varepsilon_{\nu)}{}^{\tau\sigma}\partial_\eta\partial_\tau h_{\rho\sigma} \tag{434}$$

$\partial^\mu\mathcal{G}_{\mu\nu}(h) = 0$ and $\eta^{\mu\nu}\mathcal{G}_{\mu\nu}$ is the linearized scalar curvature.

General solution of eom $\mathcal{G}_{\mu\nu}(h) = 0$ is $h_{\mu\nu} = \partial_\mu\xi_\nu + \partial_\nu\xi_\mu$. no dynamics.

12.3.3 massive gravity with PF mass term

Pauli-Fierz Lagrangian

$$\mathcal{L}_{PF} \sim h^{\mu\nu}\mathcal{G}_{\mu\nu}(h) - \frac{1}{2}m^2(h^{\mu\nu}h_{\mu\nu} - h^2) \tag{435}$$

eom

$$\mathcal{G}_{\mu\nu}(h) = \frac{m^2}{2}(h_{\mu\nu} - \eta_{\mu\nu}h) \tag{436}$$

leads to $(\partial^2 + m^2)h_{\mu\nu} = 0$, $\partial^\mu h_{\mu\nu} = 0$, $h = 0$.

dof$= 6 - 3 - 1 = 2$

dualize

$$h_{\mu\nu} = \frac{1}{\mu}\varepsilon_\mu{}^{\rho\sigma}\partial_\rho h_{\sigma\nu}\,, \quad h = 0 \tag{437}$$

$$\mathcal{L} \sim \varepsilon^{\mu\nu\rho}h_\mu{}^\sigma\partial_\nu h_{\rho\sigma} + m(h^{\mu\nu}h_{\mu\nu} - h^2) \tag{438}$$

12.3.4 Topological Massive Gravity [TMG]

Linearlizaed TMG

$$\mathcal{G}_{\mu\nu}(h) = \frac{1}{\mu}\varepsilon_\mu{}^{\rho\sigma}\partial_\rho\mathcal{G}_{\sigma\nu}(h)\,, \quad \eta^{\mu\nu}\mathcal{G}_{\mu\nu} = 0 \tag{439}$$

$$S_{TMG} = \frac{1}{\kappa^2}\int d^3x\left(-\sqrt{-g}R + \frac{1}{\mu}\mathcal{L}_{CS}\right) \tag{440}$$

with

$$\mathcal{L}_{LCS} \equiv \frac{1}{2}\varepsilon^{\mu\nu\rho}\left[\Gamma^\alpha_{\mu\beta}\partial_\nu\Gamma^\beta_{\rho\alpha} + \frac{2}{3}\Gamma^\alpha_{\mu\gamma}\Gamma^\gamma_{\nu\beta}\Gamma^\beta_{\rho\alpha}\right] \tag{441}$$

massive, one helicity.

similar but less symmetric Lagrangian

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4\mu}\varepsilon^{\mu\nu\rho}e_\mu{}^\alpha\partial_\nu e_{\rho\alpha} - \frac{1}{4}(e^{\mu\nu}e_{\mu\nu} - e^2) \tag{442}$$

[CTMG] is also considered.

12.3.5 New Massive Gravity [NMG]

Replace $h_{\mu\nu}$ by $\mathcal{G}_{\mu\nu}$ in Pauli-Fierz

$(\partial^2 + m^2)\mathcal{G}_{\mu\nu} = 0$, $\eta^{\mu\nu}\mathcal{G}_{\mu\nu} = 0$

$$S_{NMG}[g] = \frac{1}{\kappa^2}\int d^3x\sqrt{-g}\left[-R + \frac{1}{m^2}K\right] \tag{443}$$

with

$$K = R_{\mu\nu}R^{\mu\nu} - \frac{3}{8}R^2 \tag{444}$$

Note that the wrong sign put on R.

Also note

$$K = -\varepsilon^{\mu\sigma\lambda}\varepsilon^{\nu\rho}{}_\lambda\tilde{R}_{\mu\nu}\tilde{R}_{\sigma\rho} = \tilde{R}^{\mu\nu}\tilde{R}_{\mu\nu} - \tilde{R}\tilde{R} \tag{445}$$

with

$$\tilde{R}_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{4}Rg_{\mu\nu} \tag{446}$$

massive gravitons with helicities ± 2 (same mass)
eom

$$\mathcal{G}_{\mu\nu} + \frac{1}{2m^2} K_{\mu\nu} = 0 \tag{447}$$

$$K_{\mu\nu} = \frac{2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta}{\delta g^{\mu\nu}} \int d^3x \sqrt{-g} K \tag{448}$$

$$\begin{aligned} K_{\mu\nu} &= 2\nabla^2 R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}(\nabla_\mu \nabla_\nu R + g_{\mu\nu}\nabla^2 R) \\ &\quad -8R_{\mu\rho}R^\rho{}_\nu + \frac{9}{2} R R_{\mu\nu} + g_{\mu\nu}\left(3R^{\alpha\beta}R_{\alpha\beta} - \frac{13}{8}R^2\right) \end{aligned} \tag{449}$$

$$g^{\mu\nu} K_{\mu\nu} = K \tag{450}$$

leads to no ghost.
Auxiliary field formalism
$f_{\mu\nu}$: symmetric auxiliary tensor

$$S[g,f] = \frac{1}{\kappa^2} \int d^3x \sqrt{-g} \left[-R + f^{\mu\nu}\mathcal{G}_{\mu\nu}(g) - \frac{m^2}{4}(f^{\mu\nu}f_{\mu\nu} - f^2) \right] \tag{451}$$

where $f = g^{\mu\nu} f_{\mu\nu}$.
eom

$$f_{\mu\nu} = \tilde{R}_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{4} R g_{\mu\nu} \tag{452}$$

linearized NMG = Fierz-Pauli

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + \kappa h_{\mu\nu}\,, \qquad \tilde{h}_{\mu\nu} = h_{\mu\nu} - f_{\mu\nu} \tag{453}$$

$$S[\tilde{h}, f] = \int d^3x \left[-\frac{1}{2}\tilde{h}^{\mu\nu}\mathcal{G}_{\mu\nu}(\tilde{h}) + \frac{1}{2} f^{\mu\nu}\mathcal{G}_{\mu\nu}(f) - \frac{m^2}{4}(f^{\mu\nu}f_{\mu\nu} - f^2) \right] \tag{454}$$

wrong sign for $\tilde{h}$ but it does not propagate.

12.3.6 Generalized Massive Gravity [GMG]

$$S_{CGMG}[g] = \frac{1}{\kappa^2} \int d^3x \sqrt{-g} \left[\sigma R + \frac{1}{m^2} K + \frac{1}{\mu} \mathcal{L}_{LCS} \right] \tag{455}$$

where $m^2 = m_+ m_-$, $\mu = -\frac{m_+ m_-}{m_+ - m_-}$.
massive gravitons with helicities ± 2 (different mass)
eom

$$G_{\mu\nu} + \frac{1}{\mu} C_{\mu\nu} + \frac{1}{2m^2} K_{\mu\nu} = 0 \tag{456}$$

where $C_{\mu\nu}$ is the Cotton tensor.
Max. simmetric Solution $G_{\mu\nu} = -\Lambda g_{\mu\nu}$ then $C_{\mu\nu} = 0$ and $K_{\mu\nu} = -\frac{1}{2}\Lambda^2 g_{\mu\nu}$ thus

$$\Lambda(4m^2 - \Lambda) = 0 \tag{457}$$

Minkowski and dS vacua.
Flipping σ yieds Minkowski vac. with ghost and AdS stable vac.

12.3.7 Cosmological Generalized Massive Gravity [CGMG]

$$S_{CGMG}[g] = \frac{1}{\kappa^2}\int d^3x\sqrt{-g}\left[\sigma R + \frac{1}{m^2}K + \frac{1}{\mu}\mathcal{L}_{LCS} - 2\lambda m^2\right] \quad (458)$$

where $m^2 = m_+m_-$, $\mu = -\frac{m_+m_-}{m_+-m_-}$.

For $m_+ = m_-$, NMG

For $m_+ \to \infty$, TMG

massive gravitons $(m_\pm)$

eom

$$\lambda m^2 g_{\mu\nu} - \sigma G_{\mu\nu} + \frac{1}{\mu}C_{\mu\nu} + \frac{1}{2m^2}K_{\mu\nu} = 0 \quad (459)$$

$sigma = 1$ is right sign.

Max. simmetric Solution $G_{\mu\nu} = -\Lambda g_{\mu\nu}$

$$\Lambda = 2m^2[\sigma \pm \sqrt{1+\lambda}] \quad (460)$$

$\sigma = -1$

No max. sym. solution for $\lambda < -1$

$\lambda > 0$ then $\Lambda < 0$ BTZ BH.

a special point $\lambda = -1$. enhanced symmetry, new BH

$\lambda = 3$:

Boundary CFT

12.3.8 exercises

1. Show in 3D

$$\Omega_{ab} = 2(R_ae_b - R_be_a) - Re_ae_b \quad (461)$$

where $R_a = R_{ab}e^b$, $R = R_{ab}\eta^{ab}$

$G_a = G_{ab}e^b$, $G = G_{ab}\eta^{ab}$

$$\Omega_{ab} = 2(G_ae_b - G_be_a - Ge_ae_b) \quad (462)$$

Einstein eq

$$G_a - \Lambda e^a = 0 \quad (463)$$

2. use of forms.

Chern-Simons-Proca

$$\mathcal{L} \sim AdA + \frac{2}{3}AAA + mA \wedge *A \quad (464)$$

what if: 2 copies of CS

1) Abelian

$$\mathcal{L} = AdA - BdB + m(A-B) \wedge *(A-B) \quad (465)$$

$$F_A = -m*(A-B) = F_B \Rightarrow A - B = d\phi \quad (466)$$

$$F_A = -m * d\phi\,, \qquad \text{Bianchi} \quad d*d\phi = 0 \Leftrightarrow \partial^2\phi = 0 \quad (467)$$

1 dof identical to Stuckelberg in Proca in the gauge $d*A = 0$

$m > 0$ no ghost

2) Non-Abelian

$$S = S_{CS}[A] - S_{CS}[B] + \int m(A-B)\wedge *(A-B) \tag{468}$$

$$F_A = -m*(A-B) = F_B \Rightarrow A-B \tag{469}$$

$$A = U^\dagger B U - U^\dagger dU = U^\dagger D_B U \tag{470}$$

where $U = e^{\pi_a t_a}$ with t_a gauge gen.

$$F_B = *(U^\dagger \mathcal{D}_B U)\,, \qquad \mathcal{D}_B F_B = 0 \tag{471}$$

$$\mathcal{D}*\mathcal{D}U - \mathcal{D}*B = 0 \Leftrightarrow \text{eom of the Stuckelberg in Proca, in the gauge } \mathcal{D}*B = 0 \tag{472}$$

$dim(G)$ dof

Q. 1) ghost?

2) massive mode?

3. 3D GR with $\Lambda < 0$

$$S = S_{CS}[A_+] - S_{CS}[A_-] + m\int (A_+ - A_-)\wedge *(A_+ - A_-) \tag{473}$$

$$A_+ = \left(\omega^a + \frac{1}{\ell}e^a\right)T^a\,, \quad A_- = \left(\omega^a - \frac{1}{\ell}e^a\right)T^a \tag{474}$$

$T^a \in sl(2,R)$

$*$ choose a background $\gamma_{\mu\nu} = \bar{e}^a_\mu \bar{e}^b_\nu \eta_{ab}$

$$\frac{m}{\ell}\left(h^2_{\mu\nu} - \frac{1}{2}h^2\right) \tag{475}$$

12.4 BTZ BH

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = -\Lambda g_{\mu\nu} \tag{476}$$

$$R_{\mu\nu\rho\sigma} = \Lambda(g_{\mu\rho}g_{\nu\sigma} - g_{\nu\rho}g_{\mu\sigma}) \tag{477}$$

$$\Lambda = -\frac{1}{\ell^2} < 0 \tag{478}$$

$$U^2 + T^2 - X^2 - Y^2 = -\frac{1}{\Lambda} = \ell^2 \tag{479}$$

$$U = \ell\cosh\rho\cos t\,, \quad T = \ell\cosh\rho\sin t\,, \tag{480}$$

$$X = \ell\sinh\rho\cos\varphi\,, \quad Y = \ell\sinh\rho\sin\varphi\,, \tag{481}$$

$$ds^2 = -dU^2 - dT^2 + dX^2 + dY^2 \tag{482}$$

$$ds^2 = \ell^2(-\cosh^2\rho\, dt^2 + d\rho^2 + \sinh^2\rho\, d\varphi^2) \tag{483}$$

Further we introduce new variable θ

$$\tanh\rho = \sin\theta \qquad \theta\in[0,\pi/2] \tag{484}$$

$$ds^2 = \frac{\ell^2}{\cos^2 r}(-dt^2 + d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\varphi^2) \tag{485}$$

Another set

$$U = \frac{r}{\sqrt{M}} \cosh \sqrt{M}\phi\,, \quad T = \sqrt{\frac{r^2}{M} - \ell^2} \sinh \frac{\sqrt{M}}{\ell} t\,, \tag{486}$$

$$X = \sqrt{\frac{r^2}{M} - \ell^2} \cosh \frac{\sqrt{M}}{\ell} t\,, \quad Y = \frac{r}{\sqrt{M}} \sinh \sqrt{M}\phi\,, \tag{487}$$

$$ds^2 = -\left(\frac{r^2}{\ell^2} - M\right) dt^2 + \left(\frac{r^2}{\ell^2} - M\right)^{-1} dr^2 + r^2 d\phi^2 \tag{488}$$

This is non-rotating BTZ BH metric.

More general solution:

$$ds^2 = -(N^\perp)^2 dt^2 + (N^\perp)^{-2} dr^2 + r^2 (d\phi + N^\phi dt)^2 \tag{489}$$

with

$$N^\perp = \sqrt{-M + \frac{r^2}{\ell^2} + \frac{J^2}{4^2}}\,, \qquad N^\phi = -\frac{J}{2r^2} \tag{490}$$

$$r_\pm = \ell \sqrt{\frac{M}{2}\left(1 \pm \sqrt{1 - \frac{J^2}{M^2 \ell^2}}\right)} \tag{491}$$

12.5 One-loop partition function of 3D gravity

12.5.1 partition function of 3D gravity

$$Z = \int \mathcal{D}\phi\, e^{-\frac{1}{g^2} S[\phi]} \tag{492}$$

$$AdS_3 = \mathbf{H}_3 \tag{493}$$

$$\mathcal{M} = \mathbf{H}_3 / \Gamma\,, \quad \Gamma \in SL(2, \mathbf{C}) \tag{494}$$

$$S = -\frac{1}{16\pi G} \int d^3 \sqrt{g} \left(R + \frac{2}{\ell^2}\right) \tag{495}$$

eom

$$R_{\mu\nu} = -\frac{2}{\ell^2} g_{\mu\nu} \tag{496}$$

$$Z_{gravity}(\partial\mathcal{M} = \Sigma) = \sum_{Class.\ sol.\ \mathcal{M}_i} \int_{\partial\mathcal{M}_i = \Sigma} \mathcal{D}g\, e^{-kS[g]}$$
$$= \sum_{\mathcal{M}_i} \exp\left[-kS^{(0)}(\mathcal{M}_i) + S^{(1)}(\mathcal{M}_i) + \frac{1}{k} S^{(2)}(\mathcal{M}_i) + \cdots\right] = Z_{CFT}(\Sigma) \tag{497}$$

with $k \equiv \frac{\ell}{16\pi G}$.

12.5.2 Thermal AdS and the operator method

Euclidean AdS_3

$$ds^2 = \cosh^2\rho\, d\tilde{t}^2 + d\rho^2 + \sinh^2\rho\, d\varphi^2 \tag{498}$$

identification

$$(\tilde{t}, \varphi) = (\tilde{t} + \beta, \varphi + \theta) \tag{499}$$

solid torus.
the boundary $\partial\mathcal{M}$ is a T^2 with modulus $\tau = \frac{1}{2\pi}(\theta + i\beta)$
$\mathbf{H}_3/\mathbf{Z}$
BTZ is also solid torus $\tau \to -\frac{1}{\tau}$.

$$\tau \to \frac{a\tau + b}{c\tau + d}\,, \qquad \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL(2, \mathbf{Z}) \tag{500}$$

partition function

$$Z(\tau, \bar{\tau}) = \mathrm{Tr}\, e^{-\beta H - i\theta J} \tag{501}$$

$L_n,\, \bar{L}_n,\, c = \frac{3\ell}{2G} \equiv 24k$

$$\prod_{n,m\geq 2} L_{-n}^{a_n} \bar{L}_{-m}^{\bar{a}_n} |0\rangle\,, \qquad a_m,\ \bar{a}_m \geq 0 \tag{502}$$

partition function

$$Z(\tau, \bar{\tau}) = \mathrm{Tr}\, q^{L_0 - \frac{c}{24}} \bar{q}^{\bar{L}_0 - \frac{c}{24}} \tag{503}$$

$L_0 + \bar{L}_0 - \frac{c}{12} = H$, $L_0 - \bar{L}_0 = J$, $q = e^{2\pi i\tau}$

$$Z(\tau, \bar{\tau}) = |q|^{-2k} \prod_{n=2}^{\infty} \frac{1}{|1 - q^n|^2} \tag{504}$$

$|q|^{-2k}$ corresponds to $e^{-kS^{(0)}}$, $\prod_{n=2}^{\infty} \frac{1}{|1-q^n|^2}$ to $e^{S^{(1)}}$

12.5.3 The heat kernel method

$$Z_{1-loop} = \int \mathcal{D}\phi\, e^{-\frac{1}{2}\int_{\mathcal{M}} d^3x\sqrt{g}\phi\,\Delta\phi} = (\det\Delta)^{-1/2} \tag{505}$$

$$\Delta\psi_n = \lambda_n\psi_n \to \det\Delta = \prod_n \lambda_n \tag{506}$$

where $\int_{\mathcal{M}} d^3x\sqrt{g}\psi_n(x)\psi_m(x) = \delta_{nm}$.

$$K(t, x, x') = \langle x| e^{-t\Delta} |x'\rangle = \sum_n e^{-\lambda_n t}\psi_n(x)\psi_n(x')\,, \quad x,\, x' \in \mathcal{M} \tag{507}$$

$$-\ln\det\Delta = \int_0^\infty \frac{dt}{t} \mathrm{Tr}\, e^{-t\Delta} = \int_o^\infty \frac{dt}{t} \int_{\mathcal{M}} d^3x\sqrt{g} K(t, x, x) \tag{508}$$

$$(\partial_t + \Delta)K(t,x,x') = 0 \tag{509}$$

$$K(0,x,x') = \sum_n \psi_n(x)\psi_n(x') = \delta^3(x,x') \tag{510}$$

$\mathcal{M} = \mathbf{H}_3/\Gamma$

$$K^{\mathbf{H}_3/\Gamma}(t,x,x') = \sum_{\gamma\in\Gamma} K^{\mathbf{H}_3}(t,x,\gamma x') \tag{511}$$

scalar field

$$S = \frac{1}{2}\int_{\mathbf{H}_3} d^3x\sqrt{g}\phi(-\nabla^2 + m^2)\phi \tag{512}$$

$$(\nabla^2 - m^2)K(t,x,x') = \partial_t K(t,x,x')\,, \qquad k(0,x,x') = \delta^3(x,x') \tag{513}$$

where $\delta^3(x,x') = \frac{1}{\sqrt{g}}\delta^3(x-x')$.

$$ds^2_{\mathbf{H}_3} = \frac{dy^2 + dz\,d\bar{z}}{y^2} \tag{514}$$

geodesic distance

$$r(x,x') = \cosh^{-1}(1 + u(x,x'))\,, \quad u(x,x') = \frac{(y-y')^2 + |z-z'|^2}{2y\,y'} \tag{515}$$

$$\nabla^2 = u(u+2)\partial_u^2 + 3(u+1)\partial_u = \partial_r^2 + 2\coth r\,\partial_r \tag{516}$$

for scalar

$$K(t,x,x') = K(t,r(x,x')) \tag{517}$$

$$K^{\mathbf{H}_3}(t,r) = \frac{e^{-(m^2+1)t-\frac{r^2}{4t}}}{(4\pi t)^{3/2}}\frac{r}{\sinh r} \tag{518}$$

$\Gamma \to \mathbf{Z} = SL(2,\mathcal{C})$

$$\gamma(y,z) \to (|q|^{-1}y, q^{-1}z)\,, \quad q = e^{2\pi i\tau} \text{ with } \tau = \frac{1}{2\pi}(\theta + i\beta) \tag{519}$$

boundary torus: $z = e^{-2\pi i w} \to w \sim w+1 \sim w+\tau$

fundamental domain: $y = \rho\sin\theta$, $z = \rho\cos\theta\, e^{i\varphi}$ with $1 < \rho < e^{2\pi\tau_2}$, $0 < \theta < \pi/2$, $0 < \varphi < 2\pi$

$$K^{\mathbf{H}_3/\mathbf{Z}}(t,x,x') = \sum_{n\in\mathbf{Z}} K^{\mathbf{H}_3}(t, r(x,\gamma^n x')) \tag{520}$$

$$\begin{aligned}
-\ln\det\Delta &= \int_0^\infty \frac{dt}{t}\int_{\mathbf{H}_3/\mathbf{Z}} d^3x\sqrt{g}K^{\mathbf{H}_3/\mathbf{Z}}(t,x,x')) \\
&= vol(\mathbf{H}_3/\mathbf{Z})\int_0^\infty \frac{dt}{t}\frac{e^{-(m^2+1)t}}{(4\pi t)^{3/2}} \\
&\quad + \sum_{n\neq 0}\int_0^\infty \frac{dt}{t}\int_{\mathbf{H}_3/\mathbf{Z}} d^3x\sqrt{g}K^{\mathbf{H}_3}(t,r(x,\gamma^n x'))
\end{aligned} \tag{521}$$

the first term diverges, renormalization of cc.

$$
\begin{aligned}
-\ln\det\Delta &= 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2\pi\tau_2)(2\pi)}{4|\sin\pi n\tau|^2}\int_0^{\infty}\frac{dt}{t}\,\frac{e^{-(m^2+1)t-\frac{(2\pi n\tau_2)^2}{4t}}}{4\pi^{3/2}\sqrt{t}} \\
&= 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|q|^{2nh}}{n|1-q^n|^2} \qquad (522)
\end{aligned}
$$

where $h=\frac{1}{2}(1+\sqrt{1+m^2})$.

$$
\begin{aligned}
Z^{1-loop}_{scalar} &= (\det\Delta)^{-1/2} = \exp\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|q|^{2nh}}{n|1-q^n|^2}\right) \\
&= \prod_{\ell,\ell'=0}^{\infty}\frac{1}{1-q^{\ell+h}\bar{q}^{\ell'+h}} \qquad (523)
\end{aligned}
$$

The form of $\mathrm{Tr}\, q^{L_0}\bar{q}^{\bar{L}_0}$.
weight (h,h')

$$L_0|\phi\rangle = \bar{L}_0|\phi\rangle = h|\phi\rangle \qquad (524)$$

$SL(2,\mathbf{C})$ descendants

$$L^{\ell}_{-1}\bar{L}^{\ell'}_{-1}|\phi\rangle\,, \quad \ell,\ell'\geq 0\,, \quad \text{weight}:\ (h+\ell,h+\ell') \qquad (525)$$

$$\prod_{\ell,\ell'=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}q^{n(\ell+h)}\bar{q}^{n(\ell'+h)} = \prod_{\ell,\ell'=0}^{\infty}\frac{1}{1-q^{\ell+h}\bar{q}^{\ell'+h}} \qquad (526)$$

vector field with GF

$$
\begin{aligned}
S &= \int_{\mathbf{H}_3} d^3x\sqrt{g}\left(\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}+\frac{1}{2}(\nabla_\mu A^\mu)^2\right) \\
&= \frac{1}{2}\int_{\mathbf{H}_3} d^3x\sqrt{g}A_\mu\left(-g^{\mu\nu}\nabla^2+R^{\mu\nu}\right)A_\nu \qquad (527)
\end{aligned}
$$

and action for ghosts b, c

$$S_{gh} = -\int d^3x\sqrt{g}b\nabla^2 c \qquad (528)$$

$$K_{\mu\mu'}(t,x,x') = \langle\mu\, x|e^{-t\Delta^{(1)}}|\mu'\, x'\rangle \qquad (529)$$

$$K_{\mu\mu'}(t,u(x,x')) = (\partial_\mu\partial_{\mu'}u)F(t,u)+\partial_\mu\partial_{\mu'}S(t,u) \qquad (530)$$

$$(\nabla^2+2)K_{\mu\mu'} = \partial_t K_{\mu\mu'}\,, \quad K_{\mu\mu'}(0,u(x,x')) = g_{\mu\mu'}\delta^3(x,x') \qquad (531)$$

$$
\begin{aligned}
(\nabla^2+1)F(t,u) &= \partial_t F(t,u) \qquad (532) \\
\nabla^2 S(t,u) - 2\int_u^{\infty}du' F(t,u') &= \partial_t S(t,u) \qquad (533)
\end{aligned}
$$

$$-\frac{1}{2}\ln\det\Delta^{(1)} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2\cos(2\pi n\tau_1)+e^{-2\pi n\tau_2}}{4n|\sin\pi n\tau|^2} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{q^n+\bar{q}^n+|q|^{2n}}{n|1-q^n|^2} \tag{534}$$

last term longitudinal mode.

12.5.4 one-loop partition function for gravity

gravity

$$S_{GR} = -\frac{1}{16\pi G}\int d^3x\sqrt{g}(R+2) \tag{535}$$

$$h_{\mu\nu} \equiv g_{\mu\nu} - g^{(0)}_{\mu\nu} \tag{536}$$

$$\phi \equiv h^{\rho}_{\rho}, \qquad \phi_{\mu\nu} \equiv h_{\mu\nu} - \frac{1}{3}g_{\mu\nu}h^{\rho}_{\rho} \tag{537}$$

$$S_{GF} = \frac{1}{32\pi G}\int d^3x\sqrt{g}\nabla^{\mu}\left(h_{\mu\sigma}-\frac{1}{2}g_{\mu\sigma}h\right)\nabla^{\nu}\left(h^{\sigma}_{\nu}-\frac{1}{2}\delta^{\sigma}_{\nu}h\right) \tag{538}$$

$$S_{gFix} = -\frac{1}{32\pi G}\int d^3x\sqrt{g}\left[\frac{1}{2}\phi^{\mu\nu}(\nabla^2+2)\phi_{\mu\nu} - \frac{1}{12}\phi(\nabla^2-4)\phi\right] \tag{539}$$

analytic cont. $\phi \to i\phi$

ghost action

$$S_{gh} = -\frac{1}{32\pi G}\int d^3x\sqrt{g}\bar{\eta}^{\mu}(\nabla^2-2)\eta_{\mu} \tag{540}$$

$$Z^{1-loop}_{gravity} = \frac{\det\Delta^{(1)}}{\sqrt{\det\Delta^{(2)}\det\Delta^{(0)}}} \tag{541}$$

$$K_{\mu\nu,\mu'\nu'}(t,x,x') = \langle\mu\nu\, x|e^{-t\Delta^{(2)}}|\mu'\nu'\, x'\rangle \tag{542}$$

because of $\phi^{\rho}_{\rho}=0$, $g^{\mu\nu}K_{\mu\nu,\mu'\nu'} = g^{\mu'\nu'}K_{\mu\nu,\mu'\nu'} = 0$

$$\begin{aligned} K^{\mathbf{H}_3}(t,u(x,x')) &= (\partial_\mu\partial_{\mu'}u\partial_\nu\partial_{\nu'}u + \partial_\mu\partial_{\nu'}u\partial_\nu\partial_{\mu'}u)G(t,u) \\ &+ g_{\mu\nu}g_{\mu'\nu'}H(t,u) + \nabla_{(\mu}[\partial_{\nu)}\partial_{(\mu'}u\partial_{\nu')}u\,X(t,u)] \\ &+ \nabla_{(\mu}[\partial_{\nu)}u\partial_{\mu'}u\partial_{\nu'}u\,Y(t,u)] \\ &+ \nabla_{\mu}[\partial_\nu u\,Z(t,u)]g_{\mu'\nu'} + \{\mu\leftrightarrow\mu',\ \nu\leftrightarrow\nu'\} \end{aligned} \tag{543}$$

$$(\nabla^2+2)K_{\mu\nu,\mu'\nu'} = \partial_t K_{\mu\nu,\mu'\nu'} \tag{544}$$

$$\nabla^2 G = \partial_t G \tag{545}$$

$$\nabla^2 H - 4H - 4G - 8(u+1)\int_u^{\infty}du' G(t,u') = \partial_t H \tag{546}$$

$$\nabla^2 X + 2(u+1)\partial_u X + 4X + 4(u+1)Y + 4G = \partial_t X \tag{547}$$

$$\nabla^2 Y + 6(u+1)\partial_u Y + 2\partial_u X + 7Y = \partial_t Y \tag{548}$$

$$\nabla^2 Z + 2(u+1)\partial_u Z - Z + 2Y + 4\int_u^{\infty}du' G(t,u') = \partial_t Z \tag{549}$$

$$
\begin{aligned}
\ln Z^{1-loop}_{gravity} &= -\frac{1}{2}\ln\det\Delta^{(2)} + \ln\det\Delta^{(1)} - \frac{1}{2}\ln\det\Delta^{(0)} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{q^{2n}+\bar{q}^{2n}-|q|^{2n}(q^n+\bar{q}^n)}{n|1-q^n|^2} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{q^{2n}}{1-q^n}+\frac{\bar{q}^{2n}}{1-\bar{q}^n}\right) \\
&= -\sum_{m=2}^{\infty}\ln|1-q^m|^2
\end{aligned}
\tag{550}
$$

$$
Z^{1-loop}_{gravity}(\tau,\bar{\tau}) = \prod_{n=2}^{\infty}\frac{1}{|1-q^n|^2} \tag{551}
$$

$$
Z_{BTZ}(\tau) = Z_{thermal}(-1/\tau) \tag{552}
$$

higher genus?

参考文献

[1] T. Hanada, Master thesis, 2005.

[2] Feynman

[3] H. C. Ohanian and R. Ruffini, *Gravitation and Spacetime (2nd ed.)*, Norton, 1994.

[4] M. J. Duff, *A Particle Physicist's Approach to the Theory of Gravitation*, ICTP preprint IC/73/70, 1973.

[5] M. D. Scadron, *Advanced Quantum Theory (3rd ed.)*, World Scientific, 2007.

[6] M. J. G. Veltman, *"Quantum Theory of Gravitation"* in *Method in Field Theory*, North Holland/World Scientific, 1976, p. 265.

[7] E. Alvarez, Rev. Mod. Phys. **61** (1989) 561.

[8] H. W. Hamber, arXiv:0704.2895 [hep-th].

[9] S. H. Liu, Continuum and Discrete Approaches to Quantum Gravity, Dissertation, University of California, Irvine, 1996.

[10] C. Kiefer and C. Weber, Ann. Phys. (Leipzig) **14** (2005) 253.

[11] K. Risager, The KLT Relations and the Structual Links Between Quntum Gravity and Yang-Mills Theory, Dissertation, University of Copenhagen, 2004.

[12] Yves Wiaux, Théories de la Gravitation à la Lumière D'Etoiles Doubles, Dissertation, Université catholique de Louvain, 2002.

[13] B. R. Holstein, gr-qc/0607045.

[14] Ricardo Paszko, arXiv:0801.1835v2 [gr-qc] (in Portuguese)

[15] Sven Faller, Phys. Rev. **D77** (2008) 124039.

[16] N. E. J. Bjerrum-Bohr, hep-th/0206236v3 (2007).

[17] S. Detournay, hep-th/0611031.

[18] Y. Iwasaki, Prog. Theor. Phys. **46** (1971) 1587.

[19] P. Hořava, Phys. Rev. **D79** (2009) 084008.

[20] S. Carlip, Quantum Gravity in $2+1$ Dimensions, CUP, 1998.

[21] M. Blagojević, *Gravitation and Gauge Symmetries*, IOP, 2002.

[22] E. A. Bergshoeff, O. Hohm and P. K. Townsend, Phys. Rev. Lett. **102** (2009) 201301.

[23] E. A. Bergshoeff, O. Hohm and P. K. Townsend, Phys. Rev. **D79** (2009) 124042.

[24] Perimeter Institute Seminar

[25] S. Giombi, A. Maloney and X. Yin, JHEP **08** (2008) 007.