集中講義

# 弦理論と非摂動的取り扱い，<br>関係あること，ないこと。

白石　清（山口大学理学部）

平成20年5月16日

**概 要**

内容的には，いろんな人の review のパクリである。というか，完全に切り張りとなっている！参考文献参照。

# 目 次

# 1 Introduction

弦理論の非摂動的取り扱いに大きな進展があった。
それは duality（双対性）の発見によってもたらされた。
また，それは，古典的な結果と量子論的な結果を結びつける。
ここ２，３年の間に，古典的弦理論と場の量子論を結びつける双対性が理解されてきた。これが AdS/CFT correspondence である。

# 2 Duality

## 2.1 調和振動子

一次元調和振動子のハミルトニアンは

$$\begin{aligned} H &= \frac{p^2}{2} + \frac{1}{2}\omega^2 x^2 \\ &= \omega\left(aa^\dagger + a^\dagger a\right) \end{aligned} \tag{1}$$

ここで

$$a = \sqrt{\frac{\omega}{2}}x + i\sqrt{\frac{1}{2\omega}}p \tag{2}$$

$$a^\dagger = \sqrt{\frac{\omega}{2}}x - i\sqrt{\frac{1}{2\omega}}p \tag{3}$$

とした。
次の変換を考える。

$$D: \begin{array}{ccc} x & \to & p/\omega \\ p & \to & -\omega x \end{array} \tag{4}$$

この変換の下で

$$\begin{array}{ccc} a & \to & -ia \\ a^\dagger & \to & +ia^\dagger \end{array} \tag{5}$$

となり，

$$H \to H \tag{6}$$

ハミルトニアンは不変。

<u>exercise</u>

$$D^2 = P \quad \text{（パリティ変換）} \tag{7}$$

を示せ。

exercise

$$\begin{array}{rcl} a & \to & e^{-i\varphi}a \\ a^\dagger & \to & e^{+i\varphi}a^\dagger \end{array} \tag{8}$$

となるような変換をつくれ。

### 2.2 2 dimensional Ising model

２次元（正方格子[1]）イジングモデルの「エネルギー」

$$H = -J\sum_{(i,j)}\sigma_i\sigma_j \tag{9}$$

スピンの値は $\sigma_i = \pm 1$，$(i,j)$ は最近接スピンの対を表す。
分配関数は

$$Z(K) = \sum_{\{\sigma\}}\exp\left(K\sum_{(i,j)}\sigma_i\sigma_j\right) \tag{10}$$

$K = J/T$。

lattice と dual lattice を考えると，

$$\sinh 2K^* = \frac{1}{\sinh 2K} \tag{11}$$

を満たすとき

$$Z^*(K^*) = Z(K) \tag{12}$$

(Kramers-Wannier duality)

ぼくの講義ノートを参照。

弱結合 $\leftrightarrow$ 強結合

### 2.3 Sine-Gordon model と Massive Thirring model

２次元の Sine-Gordon model と Massive Thirring model は同じ理論を記述していることが知られている。
それぞれのモデルに含まれる結合定数には関係がついている。

[1] 実は他の格子でも duality が …

Sine-Gordon model の action:

$$S_{SG} = \int d^2x \left[ -\frac{1}{2}\partial^\mu \phi \partial_\mu \phi + \frac{2\pi}{\beta^2} (\cos \beta\phi - 1) \right] \tag{13}$$

Massive Thirring model の action:

$$S_{MT} = \int d^2x \left( i\overline{\psi}\gamma^\mu \partial_\mu \psi - m\overline{\psi}\psi - \frac{g}{2}\overline{\psi}\gamma^\mu \psi \overline{\psi}\gamma_\mu \psi \right) \tag{14}$$

<u>exercise</u>　$\beta$，$g$ は無次元であることを確かめよ。

結合定数の関係

$$\frac{\beta^2}{4\pi} = \frac{1}{1 + g/\pi} \tag{15}$$

Bosonization [2] では,

$$\partial_\mu \phi \approx \overline{\psi}\gamma^\nu \psi \epsilon_{\mu\nu} \tag{16}$$

$$\cos \beta\phi \approx \bar{\psi}\psi \tag{17}$$

という関係から

$$\textit{SG model} \text{ の } \textit{soliton} \approx \textit{MT model} \text{ のフェルミオン} \tag{18}$$

を明らかにする。

すなわち次の対応。

$$\textit{kink} \leftrightarrow \textit{elementary } \psi \tag{19}$$

$$\textit{antikink} \leftrightarrow \textit{elementary } \bar{\psi} \tag{20}$$

$$\textit{elementary } \phi \leftrightarrow \bar{\psi}\text{–}\psi \textit{ bound state} \tag{21}$$

$$\textit{topological charge} \leftrightarrow \textit{fermion number} \tag{22}$$

また別の機会に勉強しましょう。

<u>exercise</u>

Sine-Gordon 理論のソリトン解と，ソリトンの質量を求めよ。

[2] 論文集：M. Stone, “Bosonization” (World Scientific) には，Coleman の論文等，重要な論文が集めてある。

### 2.4　電磁場

真空中の Maxwell 方程式は

$$
\begin{aligned}
\nabla \cdot \mathbf{E} &= 0 && (23)\\
\nabla \times \mathbf{B} &= \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} && (24)\\
\nabla \cdot \mathbf{B} &= 0 && (25)\\
\nabla \times \mathbf{E} &= -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} && (26)
\end{aligned}
$$

であるが，これらは次の変換で不変。

$$
D: \begin{array}{ccc} \mathbf{E} & \to & \mathbf{B} \\ \mathbf{B} & \to & -\mathbf{E} \end{array} \tag{27}
$$

<u>exercise</u>

$$
D^2 = C \quad \text{（荷電共役変換）} \tag{28}
$$

を示せ。

<u>exercise</u>

Maxwell 方程式を不変に保つ，連続な変数を含む変換をつくれ。

ヒント ?:　$\mathbf{E} + i\mathbf{B}$ の結合を考えよ。

$$
\tilde{F}^{\mu\nu} = \frac{1}{2}\epsilon^{\mu\nu\lambda\sigma}F_{\lambda\sigma} \tag{29}
$$

を定義すると，双対変換は

$$
D: \begin{array}{ccc} F_{\mu\nu} & \to & \tilde{F}_{\mu\nu} \\ \tilde{F}_{\mu\nu} & \to & -F_{\mu\nu} \end{array} \tag{30}
$$

と書ける。

<u>exercise</u>　これを確かめよ。ただし $\epsilon^{0123} = 1$

もっと対称性は？

action を次のように書く。

$$
S = \int \frac{\tau}{32\pi i}(F + i * F) \wedge (F + i * F) + h.c. \tag{31}
$$

ここで

$$
\tau = \frac{\theta}{2\pi} + i\frac{4\pi}{g^2} \tag{32}
$$

$$*F \wedge *F = -F \wedge F \tag{33}$$

などに気をつけると

$$(F + i * F) \wedge (F + i * F) = 2i * F \wedge F + 2F \wedge F \tag{34}$$

経路積分は

$$\int \mathcal{D}A_\mu \ e^{iS} \tag{35}$$

のように書くが，恒等式 $dF = 0$ を constraint として，未定常数 $\hat{A}_\mu$ を用い次のようにも書ける。

$$\int \mathcal{D}F\mathcal{D}\hat{A}_\mu \ e^{iS'} \tag{36}$$

ここで

$$S' = S + \frac{1}{8\pi}\int d^4x \hat{A} \wedge dF \tag{37}$$

先に $F$ について積分してしまうと，次の action を用いた表式が得られる。

$$\hat{S} = \int d^4x \frac{1}{32\pi i}\left(\frac{-1}{\tau}\right)\left(\hat{F} + i * \hat{F}\right)^2 + h.c. \tag{38}$$

ここでは $\hat{F} = d\hat{A}$ である。

等価な理論を得るための変換は

$$S: \quad \tau \to -1/\tau, \qquad T: \quad \tau \to \tau + 1 \tag{39}$$

<u>exercise</u>　$T$ はどこからわかる？ (non-abelian にする …？)

$S$ と $T$ によって生成される群は $SL(2,Z)$ である。

$$\tau \to \frac{a\tau + b}{c\tau + d}, \qquad \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL(2,Z) \tag{40}$$

<u>exercise</u>　$S$ と $T$ を表す行列を書け。

## 2.5 電荷と磁荷

### 2.5.1 点磁荷のまわりの電荷の運動

原点に「点磁荷」をおく。

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} = \frac{g}{4\pi r^3}\mathbf{r} \tag{41}$$

ここで $r = |\mathbf{r}|$。

質量 $m$，電荷 $e$ の粒子の運動方程式は

$$m\ddot{\mathbf{r}} = e\dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{B} = \frac{eg}{4\pi}\dot{\mathbf{r}} \times \frac{\mathbf{r}}{r^3} \tag{42}$$

左から $\mathbf{r}$ を外積すると

$$\begin{aligned} \mathbf{r} \times m\ddot{\mathbf{r}} &= \frac{eg}{4\pi}\mathbf{r} \times \left(\dot{\mathbf{r}} \times \frac{\mathbf{r}}{r^3}\right) \\ &= \frac{eg}{4\pi}\dot{\hat{\mathbf{r}}} \end{aligned} \tag{43}$$

ここで $\hat{\mathbf{r}} = \mathbf{r}/r$。

したがって

$$\frac{d}{dt}\left[\mathbf{r} \times m\dot{\mathbf{r}} - \frac{eg}{4\pi}\hat{\mathbf{r}}\right] = 0 \tag{44}$$

これが角運動量の保存を表しているはずである。付加している項は何か？

電磁場の角運動量を計算してみよう。

$$\begin{aligned} \mathbf{J}^{(em)} &= \int d^3\mathbf{r}\ \mathbf{r} \times (\mathbf{E} \times \mathbf{B}) \\ &= \int d^3\mathbf{r}\ \frac{g}{4\pi r}\left(\mathbf{E} - \mathbf{r}\frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{E}}{r^2}\right) \\ &= \int d^3\mathbf{r}\ \mathbf{E} \cdot \nabla\left(\frac{g\hat{\mathbf{r}}}{4\pi}\right) \\ &= -\frac{eg}{4\pi}\hat{\mathbf{r}}_p \end{aligned} \tag{45}$$

したがって，付加項は電磁場の角運動量であった。

量子力学に移行すれば，粒子の角運動量は，ある任意の方向の成分が量子化されているはずである。

$$\hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{J} = -\frac{eg}{4\pi} = \frac{1}{2}\hbar n \tag{46}$$

ここで，$n$ は整数。

### 2.5.2 Dirac monopole

ベクトルポテンシャル

$$A_x = \frac{g}{4\pi}\frac{-y}{r(r+z)}, \quad A_y = \frac{g}{4\pi}\frac{x}{r(r+z)}, \quad A_z = 0 \tag{47}$$

あるいは

$$A_r = A_\theta = 0, \quad A_\varphi = \frac{g}{4\pi r}\frac{1-\cos\theta}{\sin\theta} \tag{48}$$

を考える。ただし，負の $z$ 軸上を除く。

これから導かれる磁場は

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} = \frac{g}{4\pi r^3}\mathbf{r} \tag{49}$$

これは，原点に「点磁荷」の存在を表す！

放射状の磁束密度を積分して求めた磁束は

$$\Phi = g \tag{50}$$

負の $z$ 軸上を通って,（無限に細く絞られた）磁束が原点に流れ込んでいるに違いない。

電荷 $e$ を持つ物質の波動関数による，Aharonov-Bohm 効果をつかって，この磁束を観測しようとする。波動関数の位相差は

$$\frac{e\Phi}{\hbar} = \frac{ge}{\hbar} \tag{51}$$

位相差が $2\pi n$（$n$ は整数）のとき，この絞られた磁束は全く観測できない！

Dirac monopole の磁荷 $g$

電荷 $e$ の存在する場合

$$eg = 2\pi\hbar n \tag{52}$$

（Dirac の量子化条件）

<u>exercise</u>

ベクトルポテンシャル

$$A_r = A_\theta = 0, \quad A_\varphi = -\frac{g}{4\pi r}\frac{1+\cos\theta}{\sin\theta} \tag{53}$$

は，同じ monopole の磁場を与える。

Dirac の量子化条件の成り立つときには，(48) と (53) はゲージ変換で互いに移り変わることを示せ。

もしひとつのモノポールが存在すれば，電荷の値は「量子化」される。

duality transf.

$$e \to g = \frac{2\pi}{e} \tag{54}$$

duality conjecture:

$$e \to \frac{2\pi}{e} \tag{55}$$

の変換で等価な理論が得られる。

強結合と弱結合を結びつける。

量子論を考慮した場合，くりこみに対して関係を保護するために，SUSY が必要。

- 電場は摂動的な励起
- 磁気単極子は非摂動的（古典的）物体

#### 2.5.3 'tHooft-Polyakov monopole

$SO(3)$ 対称性を持つ理論

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}G^a_{\mu\nu}G^{a\mu\nu} - \frac{1}{2}(D_\mu\phi^a)(D^\mu\phi^a) - \frac{1}{4}\lambda\left(\phi^a\phi^a - v^2\right)^2 \tag{56}$$

を考える。

ここで

$$G^a_{\mu\nu} \equiv \partial_\mu A^a_\nu - \partial_\nu A^a_\mu + g\epsilon^{abc}A^b_\mu A^c_\nu \tag{57}$$

$$D_\mu\phi^a \equiv \partial_\mu\phi^a + g\epsilon^{abc}A^b_\mu\phi^c \tag{58}$$

とする。

ここでは，具体的な静的球対称解を考えてみよう。

そのため，次のような ansatze をおく。

$$\begin{aligned} \phi^a &= \delta_{ia} \frac{x^i}{gr^2} H(r) && (59) \\ A_i^a &= \epsilon_{aij} \frac{x^j}{gr^2} (1 - K(r)) && (60) \end{aligned}$$

そうすると運動方程式は次のようになる。

$$\begin{aligned} r^2 K'' &= K(K^2 - 1) + H^2 K && (61) \\ r^2 H'' &= 2HK^2 + \lambda H \left( \frac{H^2}{g^2} - r^2 v^2 \right) && (62) \end{aligned}$$

ここで $'$ は $r$ 微分。

これを適当な境界条件で解けばよいのだが，$\lambda = 0$ のときは，もっと簡単な方程式系に帰着する：

$$\begin{aligned} rK' &= -KH && (63) \\ rH' &= H - K^2 + 1 && (64) \end{aligned}$$

このときの解として

$$K(r) = \frac{gvr}{\sinh gvr}, \quad H(r) = \frac{gvr}{\tanh gvr} - 1 \qquad (65)$$

この解は $r = 0$ で $\phi^a = A_i^a = 0$，$r \to \infty$ で $\phi^a \to \delta_{ia} \frac{x^i}{r} v$，$A_i^a = \epsilon_{aij} \frac{x^j}{gr^2}$
（BPS monopole 解）

・自発的対称性の破れ
　Higgs 場の真空期待値のおおきさ　$v$

$$M_{monopole} = \int d^3x \left( \frac{1}{4} G_{ij}^a G_{ij}^a + \frac{1}{2} (D_i \phi^a)(D_i \phi^a) \right) = \frac{4\pi}{g} v \qquad (66)$$

$$M_{massive\ gauge\ boson} = gv \qquad (67)$$

双対性！

結合定数の値が大きい（強結合）だとモノポール（ソリトン）の質量は軽くなる。

exercise

（$\lambda = 0$ のとき）場のエネルギーは

$$
\begin{aligned}
E &= \int d^3\mathbf{r}\left[\frac{1}{2}\left(B_i^a\right)^2 + \frac{1}{2}\left(D_i\phi^a\right)^2\right] \\
&= \int d^3\mathbf{r}\left[\frac{1}{2}\left(B_i^a \mp D_i\phi^a\right)^2 \pm B_i^a D_i\phi^a\right] \qquad (68)
\end{aligned}
$$

と書ける。

BPS monopole は極小のエネルギーを持つことを示せ。

**Note**

ansatze を代入すると

$$
\partial_k\phi^a = \frac{1}{g}\left[\left(\frac{\delta_{ka}}{r^2} - \frac{2x^k x^a}{r^4}\right)H + \frac{x^k x^a}{r^3}H'\right], \qquad (69)
$$

$$
g\epsilon^{abc}A_k^b\phi^c = -\frac{1}{g}\left(\frac{\delta_{ka}}{r^2} - \frac{x^k x^a}{r^4}\right)H(1-K). \qquad (70)
$$

ここで使ったのは，$\partial_i x^j = \delta_i^j$，$\partial_i r = x^i/r$，そして $\epsilon^{abc}\epsilon_{ade} = \delta_d^b\delta_e^c - \delta_e^b\delta_d^c$。
したがって

$$
D_k\phi^a = \frac{1}{g}\left[\left(\frac{\delta_{ka}}{r^2} - \frac{x^k x^a}{r^4}\right)KH + \frac{x^k x^a}{r^3}\left(H' - \frac{1}{r}H\right)\right]. \qquad (71)
$$

よって

$$
(D_\mu\phi^a)(D^\mu\phi^a) = \frac{1}{g^2}\left[\frac{1}{r^2}\left(H' - \frac{1}{r}H\right)^2 + \frac{2}{r^4}K^2H^2\right], \qquad (72)
$$

を得る。

また，

$$
\begin{aligned}
gG_{ij}^a &= -2\epsilon_{aij}\frac{1-K}{r^2} + \left(\epsilon_{aik}\frac{x^k x^j}{r^3} - \epsilon_{ajk}\frac{x^k x^i}{r^3}\right)\left(K' + \frac{2(1-K)}{r}\right) \\
&\quad + \epsilon_{ijk}\frac{x^k x^a}{r^4}(1-K)^2, \qquad (73)
\end{aligned}
$$

となるので，ちょっと計算すると

$$
g^2 G_{\mu\nu}^a G^{a\mu\nu} = \frac{4}{r^2}(K')^2 + \frac{2}{r^4}(1-K^2)^2 \qquad (74)
$$

とまとめられる。

以上を用いて，作用積分は（ただし，定常だから時間積分は省き，球対称性をつかうと）

$$\frac{4\pi}{g^2}\int dr \quad \left[-(K')^2-\frac{1}{2r^2}(1-K^2)^2-\frac{1}{2}\left(H'-\frac{1}{r}H\right)^2-\frac{1}{r^2}K^2H^2 \right. \\ \left. -\frac{\lambda g^2r^2}{4}\left(\frac{H^2}{g^2r^2}-v^2\right)^2\right] \tag{75}$$

となる。ちなみに，解を変分で求める際は表面項は落として良いので（まともな解について），作用積分は次と等価。

$$\frac{4\pi}{g^2}\int dr \quad \left[-(K')^2-\frac{1}{2r^2}(1-K^2)^2-\frac{1}{2}(H')^2-\frac{1}{r^2}K^2H^2 \right. \\ \left. -\frac{\lambda g^2r^2}{4}\left(\frac{H^2}{g^2r^2}-v^2\right)^2\right]. \tag{76}$$

## 2.6 双対性の傾向と対策

- 傾向

  粒子 ↔ ソリトン

  弱結合 ↔ 強結合

  量子論的 ↔ 古典的

- 対策

  超対称性が必要

  非摂動的な理論の対称性

# 3　Born-Infeld theory

まずは，original の話から。

## 3.1　action

通常の Maxwell の理論では，action は

$$S = \frac{1}{\mu_0}\int d^4x \left[-\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}\right] \tag{77}$$

（source のない場合）である。

Born-Infeld theory では action はパラメータ $b$ に依存する。

$$S_{BI} = \frac{1}{\mu_0 b^2}\int d^4x \left[1-\sqrt{-\det\left(\eta_{\mu\nu}+bF_{\mu\nu}\right)}\right] \tag{78}$$

<u>exercise</u>　$b$ の次元は？

適当な慣性系をとれば，電磁場の強さは

$$F_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -E & 0 & 0 \\ E & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & B \\ 0 & 0 & -B & 0 \end{pmatrix} \tag{79}$$

となる。

このとき

$$\tilde{F}^{\mu\nu} = \frac{1}{2}\epsilon^{\mu\nu\lambda\sigma}F_{\lambda\sigma} = \begin{pmatrix} 0 & B & 0 & 0 \\ -B & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -E \\ 0 & 0 & E & 0 \end{pmatrix} \tag{80}$$

$$F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} = 2\left(B^2-E^2\right) \tag{81}$$

$$F_{\mu\nu}\tilde{F}^{\mu\nu} = -4EB \tag{82}$$

である。

この慣性系で計算すれば

$$\begin{aligned} S_{BI} &= \frac{1}{\mu_0 b^2}\int d^4x\left[1-\sqrt{-\left(-1+b^2E^2\right)\left(1+b^2B^2\right)}\right] \\ &= \frac{1}{\mu_0 b^2}\int d^4x\left[1-\sqrt{1-b^2E^2+b^2B^2-b^4E^2B^2}\right] \end{aligned} \tag{83}$$

となるが，ローレンツ変換の不変量 $F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$ および $F_{\mu\nu}\tilde{F}^{\mu\nu}$ であらわせば，一般の座標系で成立する。

すなわち

$$S_{BI}=\frac{1}{\mu_0 b^2}\int d^4x\left[1-\sqrt{1+\frac{1}{2}b^2F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}-\frac{1}{16}b^4\left(F_{\mu\nu}\tilde{F}^{\mu\nu}\right)^2}\right] \tag{84}$$

を得た。

$b\to 0$ の極限では，明らかにこれは Maxwell 理論の action に帰着する。

## 3.2 duality

BI action から，場の方程式を求めると

$$\partial_\mu \mathcal{G}^{\mu\nu}=0 \tag{85}$$

exercise

$\mathcal{G}^{\mu\nu}$ を求めよ。ただし $b\to 0$ の極限で $\mathcal{G}^{\mu\nu}\to F^{\mu\nu}$ とする。

エネルギー運動量テンソルは

$$T_{\mu\nu}=\frac{1}{\mu_0}\left[\mathcal{G}_\mu{}^\lambda F_{\nu\lambda}+\eta_{\mu\nu}\mathcal{L}\right] \tag{86}$$

となる。ここで

$$\mathcal{L}=\frac{1}{b^2}\left[1-\sqrt{-\det\left(\eta_{\mu\nu}+bF_{\mu\nu}\right)}\right] \tag{87}$$

$b\to 0$ の極限では，

$$T_{\mu\nu}=\frac{1}{\mu_0}\left[F_\mu{}^\lambda F_{\nu\lambda}-\frac{1}{4}\eta_{\mu\nu}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}\right] \tag{88}$$

となる。

双対変換は

$$D: \begin{array}{ccc} F_{\mu\nu} & \to & \tilde{\mathcal{G}}_{\mu\nu} \\ \mathcal{G}_{\mu\nu} & \to & -\tilde{F}_{\mu\nu} \end{array} \tag{89}$$

ただし

$$\tilde{\mathcal{G}}^{\mu\nu} = \frac{1}{2}\epsilon^{\mu\nu\lambda\sigma}\mathcal{G}_{\lambda\sigma} \tag{90}$$

exercise

この双対変換の下で action と $T_{\mu\nu}$ が不変であることを確かめよ。

## 3.3 point charge のつくる電場

静電場を考える。point charge のつくる電場は球対称性から，

$$E_r = -\partial_r\phi \tag{91}$$

で記述される。ここで

$$A_0 = -\phi \tag{92}$$

である。

このとき BI action は

$$\frac{1}{\mu_0 b^2}\int r^2 dr \sin\theta d\theta d\varphi \left[1 - \sqrt{1 - b^2\left(\partial_r\phi\right)^2}\right] \tag{93}$$

となり，変分から次がわかる。

$$\frac{r^2\partial_r\phi}{\sqrt{1 - b^2\left(\partial_r\phi\right)^2}} = const. = -a \tag{94}$$

これを電場について解くと

$$E_r = \frac{a}{\sqrt{r^4 + a^2 b^2}} \tag{95}$$

十分遠方では，$E_r \approx a/r^2$ となる。($a = Q/(4\pi\epsilon_0)$ とすればクーロン場)
一方，$r \to 0$ の極限では，電場は発散せず，有限である。($E_r \to 1/b$)

エネルギー密度は

$$
\begin{aligned}
& \frac{1}{\mu_0}\left[\frac{E_r^2}{\sqrt{1-b^2E_r^2}}-\frac{1}{b^2}\left(1-\sqrt{1-b^2E_r^2}\right)\right] \\
= & \frac{1}{\mu_0 b^2}\left[\frac{1}{\sqrt{1-b^2E_r^2}}-1\right] \\
= & \frac{1}{\mu_0 b^2}\left[\sqrt{1+\frac{b^2Q^2}{16\pi^2\epsilon_0^2r^4}}-1\right]
\end{aligned} \tag{96}
$$

$b\neq 0$ のとき，これを全空間で積分して得られる電場のエネルギーは以下のように有限の値となる。

$$
\begin{aligned}
& 4\pi\int_0^\infty \frac{1}{\mu_0 b^2}\left[\sqrt{1+\frac{b^2Q^2}{16\pi^2\epsilon_0^2r^4}}-1\right] r^2 dr \\
= & \frac{4\pi}{\mu_0\sqrt{b}}\left(\frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\right)^{3/2}\int_0^\infty dx\left[\sqrt{1+x^4}-x^2\right] \\
= & \frac{4\pi}{3\sqrt{\epsilon_0}\sqrt{b}}\frac{1}{\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)^2}\left(\frac{Q}{4}\right)^{3/2}
\end{aligned} \tag{97}
$$

$$
I=\int_0^\infty dx\left[\sqrt{1+x^4}-x^2\right] \tag{98}
$$

において $x=\sqrt{\sinh\theta}$ とおくと

$$
I=\int_0^\infty d\theta\frac{\cosh\theta}{2\sqrt{\sinh\theta}}e^{-\theta} \tag{99}
$$

さらに $t=e^{-\theta/2}$ とおくと

$$
I=\frac{1}{\sqrt{2}}\int_0^1 dt\frac{1+t^4}{\sqrt{1-t^4}} \tag{100}
$$

$$
\int_0^1 dt\frac{1}{\sqrt{1-t^4}}=\frac{1}{4}\frac{\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)} \tag{101}
$$

$$
\int_0^1 dt\sqrt{1-t^4}=\frac{1}{4}\frac{\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{7}{4}\right)} \tag{102}
$$

なので

$$I=\frac{\sqrt{\pi}}{3\sqrt{2}}\frac{\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)}{\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)} \tag{103}$$

公式

$$\Gamma\left(2z\right)=\frac{2^{2z}}{2\sqrt{\pi}}\Gamma\left(z\right)\Gamma\left(z+\frac{1}{2}\right) \tag{104}$$

を用いて整理すると

$$I=\frac{\pi^{3/2}}{3}\frac{1}{\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)^{2}} \tag{105}$$

ちなみに，岩波数学公式 I，p. 229 によれば，

$$\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{1-x^4}}=\frac{1}{\sqrt{2}}K\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=\frac{1}{4\sqrt{2\pi}}\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)^{2} \tag{106}$$

# 4 Branes

## 4.1 $p$-branes

membrane（膜）の拡張
$p$-brane
$p$ は空間的な広がりの次元を表す。

- $p = 0$：　粒子，black hole solution
- $p = 1$：　ひも
- $p = 2$：　膜
- $p = 3, \cdots$：

$(p+1)$-form と結合する。
例：　$p = 0, \quad S_{int} = \int A_\mu dx^\mu$
例：　$p, \quad S_{int} = \int A_{p+1}$，$A_{p+1}$ は $(p+1)$-form。
$A_{p+1} \sim A_{\mu_0 \cdots \mu_p} dx^{\mu_0} \wedge \cdots \wedge dx^{\mu_p}$

exercise　ひもの場合は？

## 4.2 $p$-branes as soluton of SUGRA

計算は，Appendix を参照のこと。

調和関数

$$\nabla^2 H = 0 \tag{107}$$

Laplacian は $D - p - 1$ transverse 方向の座標についてのもの。

$$H = 1 + \left(\frac{R}{r}\right)^{D-p-3} = 1 + \left(\frac{R}{r}\right)^{\frac{p+1}{w}} \tag{108}$$

ここで

$$r^2 = \sum_{m=p+1}^{D-1} X_m^2 \tag{109}$$

$$w \equiv \frac{p+1}{D-p-3} \tag{110}$$

metric は

$$ds^2 = H^{-\frac{2}{p+1}}\left(-dt^2 + \sum_{m=1}^{p} dX_m^2\right) + H^{\frac{2w}{p+1}} \sum_{m=p+1}^{D-1} dX_m^2 \tag{111}$$

$(p+1)$-form は

$$A_{01\cdots p} \propto H^{-1} - 1 \tag{112}$$

brane が $X^m = 0 \quad (m = p+1, \cdots, D-1)$ の位置にある。

## 4.3 $p$-branes in 10 dimensions

type II 理論を考える。
R-R $(p+1)$-form $A_{p+1}$ が存在。
IIA では $p$ は偶数 (0,2)，IIB では $p$ は奇数 (-1,1,3)。[3]
$(6-p)$-brane は，磁荷を持っており，Dirac の量子化条件を満たす。

$$dA_{7-p} = *dA_{p+1} \tag{113}$$

有効場の理論の action は

$$S = \frac{1}{(2\pi)^7 \ell_s^8} \int d^{10}x\sqrt{-g}\left\{e^{-2\phi}\left[R + 4(\nabla\phi)^2\right] - \frac{2}{(8-p)!}F_{p+2}^2\right\} \tag{114}$$

[3] $A_{\mu\cdots\nu} \sim \bar{\psi}_L \gamma_\mu \cdots \gamma_\nu \psi_R$

# 5 D-branes

## 5.1 $T$-duality と開弦

### 5.1.1 閉弦と $T$-duality

閉弦のモード展開：

$$
\begin{aligned}
X^\mu(z) &= \frac{x^\mu}{2} + i\sqrt{\frac{\alpha'}{2}}\left(-\alpha_0^\mu \ln z + \sum_{m\neq 0}\frac{\alpha_m^\mu}{m} z^{-m}\right), \quad z = e^{\tau + i\sigma} &(115)\\
X^\mu(\bar z) &= \frac{x^\mu}{2} + i\sqrt{\frac{\alpha'}{2}}\left(-\tilde\alpha_0^\mu \ln \bar z + \sum_{m\neq 0}\frac{\tilde\alpha_m^\mu}{m} \bar z^{-m}\right), \quad \bar z = e^{\tau - i\sigma} &(116)
\end{aligned}
$$

$X^\mu(z,\bar z) = X^\mu(z) + X^\mu(\bar z)$ のゼロモードは

$$
\begin{aligned}
& -i\sqrt{\frac{\alpha'}{2}}\left(\alpha_0^\mu + \tilde\alpha_0^\mu\right)\tau + \sqrt{\frac{\alpha'}{2}}\left(\alpha_0^\mu - \tilde\alpha_0^\mu\right)\sigma \\
= & -i\alpha' p^\mu \tau + \sqrt{\frac{\alpha'}{2}}\left(\alpha_0^\mu - \tilde\alpha_0^\mu\right)\sigma \qquad (117)
\end{aligned}
$$

今，$I$ 方向が半径 $R$ の円周 $S^1$ にコンパクト化されているとする。運動量は量子化されるので

$$p^I = \frac{n}{R} \qquad (118)$$

（$n$ は整数）

また，弦が $S^1$ に巻き付くので，$X^I(\sigma + 2\pi) = X^I(\sigma) + 2\pi Rm$ （$m$ は整数）より

$$2\pi\sqrt{\frac{\alpha'}{2}}\left(\alpha_0^I - \tilde\alpha_0^I\right) = 2\pi Rm \qquad (119)$$

したがって

$$\alpha_0^I = \sqrt{\frac{\alpha'}{2}}\left(\frac{n}{R} + \frac{mR}{\alpha'}\right), \quad \tilde\alpha_0^I = \sqrt{\frac{\alpha'}{2}}\left(\frac{n}{R} - \frac{mR}{\alpha'}\right) \qquad (120)$$

となる。

次の $T$ 変換を考える。

$$
\begin{aligned}
n &\leftrightarrow m &(121)\\
R &\rightarrow R' = \frac{\alpha'}{R} &(122)
\end{aligned}
$$

このとき

$$\begin{aligned}\alpha_0^I &\to \alpha_0^I &(123)\\ \tilde{\alpha}_0^I &\to -\tilde{\alpha}_0^I &(124)\end{aligned}$$

nonzero modes も同様に変換するとすれば，$T$ 変換の下で

$$\begin{aligned}X^I(z) &\to X^I(z) &(125)\\ X^I(\bar{z}) &\to -X^I(\bar{z}) &(126)\end{aligned}$$

となる。[4]

#### 5.1.2 開弦と $T$-duality

開弦の場合,

$$\begin{aligned}X^\mu(z) &= \frac{x^\mu}{2} + C^\mu - i\alpha' p^\mu \ln z + i\sqrt{\frac{\alpha'}{2}}\left(\sum_{m\neq 0}\frac{\alpha_m^\mu}{m}z^{-m}\right), &(127)\\ X^\mu(\bar{z}) &= \frac{x^\mu}{2} - C^\mu - i\alpha' p^\mu \ln \bar{z} + i\sqrt{\frac{\alpha'}{2}}\left(\sum_{m\neq 0}\frac{\alpha_m^\mu}{m}\bar{z}^{-m}\right) &(128)\end{aligned}$$

再び，$I$ 方向が半径 $R$ の円周 $S^1$ にコンパクト化されているとすれば,

$$p^I = \frac{n}{R} \qquad (129)$$

（$n$ は整数）

通常の $X^I$ は,

$$\begin{aligned}X^I(z,\bar{z}) &= X^I(z) + X^I(\bar{z})\\ &= x^I - 2i\alpha' p^I \tau + i\sqrt{2\alpha'}\sum_{m\neq 0}\frac{\alpha_m^I}{m}\cos m\sigma e^{-m\tau} &(130)\end{aligned}$$

で，Neumann 境界条件

$$\partial_\sigma X^I\Big|_{0,\pi} = 0 \qquad (131)$$

閉弦と同様に，$T$ 変換が施されるとすると，$X^I \to X'^I$ となる。ここで

$$\begin{aligned}X'^I(z,\bar{z}) &= X^I(z) - X^I(\bar{z})\\ &= 2C^I + 2\alpha' p^I \sigma + i\sqrt{2\alpha'}\sum_{m\neq 0}\frac{\alpha_m^I}{m}\sin m\sigma e^{-m\tau} &(132)\end{aligned}$$

[4] superstring の場合，”right-moving” worldsheet fermion は $T$ 変換の下で $\psi^I(\bar{z}) \to -\psi^I(\bar{z})$ となる。これは，susy の変換 $\delta X^I \sim i\bar{\epsilon}\psi^I$，$\delta\psi^I \sim \Gamma^a\partial_a X^I\epsilon$ が不変であるため。

である。

$X'^I$ は Dirichlet 境界条件に従う。

$$X'^I\Big|_{\sigma=0} = 2C^I \tag{133}$$

$$\begin{aligned} X'^I\Big|_{\sigma=\pi} &= 2C^I + 2\pi\alpha' p^I = 2C^I + \frac{2\pi\alpha' n}{R} \\ &= 2C^I + 2\pi R' n \end{aligned} \tag{134}$$

というわけで，$T$-duality を開弦も含めて考察すると，Dirichlet 境界条件に従う弦が自然に出てくる。

## 5.2 Dirichlet $p$-branes

ひもの両端がディリクレ境界条件を持つような，その端点ののっている表面。

ひもの端点は「荷電粒子」とみなせるから，$U(1)$ ゲージ場と結合して，場の強さ $F_{\mu\nu}$ を生成する。

したがって，D-brane の action は $U(1)$ ゲージ場を含む。

$$S = -T_p \int d^{p+1}\xi \; e^{-\phi}\mathrm{Tr}\sqrt{-\det\left(g_{\mu\nu} + B_{\mu\nu} + 2\pi\alpha' F_{\mu\nu}\right)} \tag{135}$$

（あとで $N$ 枚の D-brane から，non-abelian 対称性がでることがわかる。そのため non-abelian gauge theory に拡張しておいた。）

ここで $G$，$B$ は次のような pullback である。

$$G_{\mu\nu} = \frac{\partial X^M}{\partial \xi^\mu}\frac{\partial X^N}{\partial \xi^\nu} G_{MN}(X(\xi)), \quad B_{\mu\nu} = \frac{\partial X^M}{\partial \xi^\mu}\frac{\partial X^N}{\partial \xi^\nu} B_{MN}(X(\xi)) \tag{136}$$

また

$$T_p = \frac{(2\pi\ell_s)^{1-p}}{2\pi\ell_s^2 g_s} \tag{137}$$

$(\ell_s^2 = \alpha')$

ここで

$$G_{\mu\nu} \approx \eta_{\mu\nu} + \partial_\mu X^a \partial_\nu X^a + O((\partial X)^4) \tag{138}$$

とすると low-energy action は

$$S = const. - \frac{1}{2g_{YM}^2}\int d^{p+1}\xi \mathrm{Tr}\left(F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{2}{(2\pi\alpha')^2}\partial_\mu X^a \partial^\mu X^a\right) + O(F^4) \tag{139}$$

ここで[5]

$$g_{YM}^2 = 2g_s(2\pi)^{p-2}\ell_s^{p-3} \tag{140}$$

特に，$p=3$ では

$$g_{YM}^2 = 4\pi g_s. \tag{141}$$

全有効作用 (bosonic) は

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2\kappa^2}\int d^{10}x e^{-2\phi}\left[R + 4(\nabla\phi)^2 - \frac{1}{12}H^2\right] \\ &\quad -T_p\int d^{p+1}x e^{-\phi}\mathrm{Tr}\left[\sqrt{-\det\left(G+B+2\pi\alpha' F\right)}\right] \\ &\quad +\frac{1}{2}\int F^{(p+2)}\wedge *F^{(p+2)} + i\mu_p\int_{brane} A^{(p+1)} \end{aligned} \tag{142}$$

$\mu_p$ は brane と $(p+1)$-form の結合定数である。

$$\mu_p^2 = 2\pi(4\pi^2\alpha')^{3-p} \tag{143}$$

ちなみに

$$\mu_{6-p}\mu_p = 2\pi \tag{144}$$

これは Dirac の量子化条件。

World-volume theory としては,

$$X^M = (X^m) \quad (m = p+1, ...) \tag{145}$$

world-volume 座標 $\sigma$ の関数としての時空座標 $X^M$ は，時空中の brane の位置を表す。

world-volume に対する一般座標変換はゲージ固定できる。

同様に，fermionic なゲージ不変性 $\kappa$-symmetry についてもゲージ固定される。

## 5.3 開弦と D-brane

開弦の境界条件

$$\left.\frac{\partial X^\mu}{\partial\sigma}\right|_{0,\pi} = 0, \quad \mu = 0,1,\cdots,p \tag{146}$$

$$\left.X^\mu\right|_{0,\pi} = x^\mu, \quad \mu = p+1,\cdots,9 \tag{147}$$

[5] $\mathrm{Tr}(T^aT^b) = \frac{1}{2}\delta^{ab}$ とすると $S = -\frac{1}{4g_{YM}^2}\int d^{p+1}\xi F^a_{\mu\nu}F^{\mu\nu a}$

「平行」なD-brane間のクーロン力は，超対称性によりキャンセルする。

具体的に，$Y$だけ離れた「平行」なD-braneの間のopen superstringの振幅を考えよう。

$$
\begin{aligned}
\mathcal{A} &= -\frac{1}{2}\mathrm{tr}\,\det(k^2+m^2) = -\frac{1}{2}\mathrm{tr}\ln(k^2+m^2) \\
&= \frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{dt}{t}\mathrm{tr}e^{-2\pi\alpha' t(k^2+m^2)}
\end{aligned}
\tag{148}
$$

ここで$m^2$は

$$
m^2 = (p^I)^2 + (oscillators) \tag{149}
$$

前のコンパクト化の議論では

$$
p^I = \frac{n}{R} = \frac{nR'}{\alpha'} \tag{150}
$$

今の場合，$2\pi R' = Y,\ n = 1$とすればいいので[6]

$$
m^2 = \frac{1}{\alpha'}(N-a) + \frac{Y^2}{4\pi^2\alpha'^2} \tag{151}
$$

ここで$a$はRセクターでは0，NSセクターでは1/2をとる。

trの中の$k$の和はGaussianなのですぐに計算できて

$$
\begin{aligned}
& \frac{V_{p+1}}{(2\pi)^{p+1}}\int d^{p+1}k\ e^{-2\pi\alpha' t\ k^2} \\
=\ & V_{p+1}\left(\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{\pi}{2\pi\alpha' t}}\right)^{p+1} \\
=\ & V_{p+1}\left(8\pi^2\alpha' t\right)^{-\frac{p+1}{2}}
\end{aligned}
\tag{152}
$$

となる。

また残りについては

$$
\left[\mathrm{Tr}\frac{1+(-1)^F}{2}e^{-2\pi t(N-a)}\right]e^{-\frac{Y^2}{2\pi\alpha'}t} \tag{153}
$$

となる。

[6] ちゃんとやりたいときは，Wilson lineをいれたものののT-dualを考えるのだろう。

[ ] についての計算はよく知られていて，
R セクターでは

$$\frac{1}{2}\mathrm{Tr}\left[e^{-2\pi t N_R}+(-1)^F e^{-2\pi t N_R}\right]=-\frac{1}{2}f_1^{-8}f_2^8+0 \tag{154}$$

NS セクターでは

$$\frac{1}{2}\mathrm{Tr}\left[e^{-2\pi t(N_{NS}-1/2)}+(-1)^F e^{-2\pi t(N_{NS}-1/2)}\right]=\frac{1}{2}f_1^{-8}f_3^8-\frac{1}{2}f_1^{-8}f_4^8 \tag{155}$$

ここで

$$f_2 = \sqrt{\frac{\vartheta_2}{\eta}} \tag{156}$$

$$f_3 = \sqrt{\frac{\vartheta_3}{\eta}} \tag{157}$$

$$f_4 = \sqrt{\frac{\vartheta_4}{\eta}} \tag{158}$$

また，別の表現では

$$f_1 = q^{\frac{1}{12}}\prod_{n=1}^{\infty}(1-q^{2n}) \tag{159}$$

$$f_2 = \sqrt{2}q^{\frac{1}{12}}\prod_{n=1}^{\infty}(1+q^{2n}) \tag{160}$$

$$f_3 = q^{-\frac{1}{24}}\prod_{n=1}^{\infty}(1+q^{2n-1}) \tag{161}$$

$$f_4 = q^{-\frac{1}{24}}\prod_{n=1}^{\infty}(1-q^{2n-1}) \tag{162}$$

ここで $q=e^{-\pi t}$。

以上のことから

$$\mathcal{A}=2V_{p+1}\int\frac{dt}{2t}(8\pi^2\alpha' t)^{-\frac{p+1}{2}}e^{-t\frac{Y^2}{2\pi\alpha'}}\frac{-f_2^8+f_3^8-f_4^8}{2f_1^8} \tag{163}$$

恒等式

$$-f_2^8+f_3^8-f_4^8\equiv 0 \tag{164}$$

のため，$\mathcal{A}=0$。

閉弦でみると，$1+(-1)^F$ の $1$ が RR セクター，$(-1)^F$ が NSNS セクターに対応。

low energy limit $(t\to 0)$ をみると，

$$
\begin{aligned}
f_1(e^{-\pi/t}) &= \sqrt{t} f_1(e^{-\pi t}) && (165)\\
f_2(e^{-\pi/t}) &= f_4(e^{-\pi t}) && (166)\\
f_3(e^{-\pi/t}) &= f_3(e^{-\pi t}) && (167)\\
f_4(e^{-\pi/t}) &= f_2(e^{-\pi t}) && (168)
\end{aligned}
$$

を用いて，

$$
\begin{aligned}
\mathcal{A} &= 2V_{p+1}\int \frac{dt}{2t}(8\pi^2\alpha' t)^{-\frac{p+1}{2}} e^{-t\frac{Y^2}{2\pi\alpha'}} t^4 \frac{-f_4(e^{-\pi/t})^8 + f_3(e^{-\pi/t})^8 - f_2(e^{-\pi/t})^8}{2f_1(e^{-\pi/t})^8}\\
&= 2V_{p+1}\int \frac{dt}{2t}(8\pi^2\alpha' t)^{-\frac{p+1}{2}} e^{-t\frac{Y^2}{2\pi\alpha'}} 8t^4(1-1)\\
&= V_{p+1}\frac{8}{2^4}(4\pi^2\alpha')^{3-p}(1-1)\pi^{\frac{p-7}{2}}\Gamma\left(\frac{7-p}{2}\right)\frac{1}{Y^{7-p}}\\
&= V_{p+1}\frac{8}{2^4}2\pi(4\pi^2\alpha')^{3-p}(1-1)\frac{1}{(7-p)\frac{2\pi^{\frac{9-p}{2}}}{\Gamma\left(\frac{9-p}{2}\right)}}\frac{1}{Y^{7-p}} && (169)
\end{aligned}
$$

すなわち[7]

$$
A \propto \frac{2T_p^2 - \mu_p^2}{Y^{7-p}} \tag{170}
$$

$\mu_p^2$ は RR charge （$f_4(q)$ の寄与。）。

「傾いている」ときは，相互作用が残る ··· 速度依存力

- 重力の低エネルギー極限＝開弦の高エネルギー極限
- 重力の高エネルギー極限＝ゲージ理論

[7] 上の計算，たぶん係数が間違ってる。

## 5.4 $N$ 枚の D-brane

$N$ 枚の D-brane が重なると，brane 上で $U(N)$ 対称性を持つゲージ理論が現れる。

開弦が D-brane 上に端点を持つので，$N \times N$ の自由度が発生。

D-brane が重なると，string の長さは 0 になって massless 自由度が生まれる。

ポテンシャルとして

$$V = \sum_{i,j=p+1}^{9} \mathrm{Tr}\left[\Phi^i, \Phi^j\right]^2 \tag{171}$$

をもつモデルを考える。。
基底状態での期待値は

$$\Phi^i = diag.(v_1^i, \cdots, v_N^i) \tag{172}$$

である。
$v_a^i$ が全て異なる値では，対称性は $U(1)^N$ に落ちる。また，どれかが一致していれば，そのぶん対称性が残る。ということは，$v_I^i$ と $I$ 番目の brane の位置を同一視することが可能となる。

$\mathcal{N} = 4$ U(N) gauge 理論は，

$$A_\mu^{IJ}, \quad \lambda_\alpha^{IJ;b}\ (SO(6)\text{ の }\mathbf{4}\text{ 表現}), \quad \phi^{IJ;i}\ (SO(6)\text{ の }\mathbf{6}\text{ 表現}) \tag{173}$$

をもつので，$N$ 枚の D3-brane に対応する。[8]

## 5.5 M(atrix) theory

$N$ 枚の D brane が重なった場合，低エネルギー action は $d = 10, \mathcal{N} = 1$ Super YM action を模してつくられる。

$$S = \int d^{10}x \mathrm{Tr}\left(-\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + i\bar{\Psi}\Gamma^\mu D_\mu \Psi\right)\cdots \tag{174}$$

SUSY は

$$\delta A_\mu \sim i\bar{\eta}\Gamma_\mu\psi \tag{175}$$
$$\delta\psi \sim \Gamma^{\mu\nu}F_{\mu\nu}\eta \tag{176}$$

[8] $g_{YM}^2 \sim g_s$，$\theta \sim \chi$ ($\chi$ は RR axion)

（4 次元に dimensional reduction すると，$\mathcal{N}=4$ SYM がつくれる。）

D brane の低エネルギー action は

$$S=T\int d^{p+1}\xi\,\mathrm{Tr}\left(-\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}+i\bar{\Psi}\Gamma^{\mu}D_{\mu}\Psi\right)\cdots \tag{177}$$

$$\begin{aligned}
F_{mn} &= \partial_m A_n-\partial_n A_m+i\left[A_m,A_n\right] && (178)\\
F_{mj} &= \partial_m X_j+i\left[A_m,X_j\right] && (179)\\
F_{ij} &= i\left[X_i,X_j\right] && (180)
\end{aligned}$$

ここで $m,n=0,1,2,\cdots,p$，$i,j=p+1,p+2,\cdots,9$。

$p=0$ の場合，すなわち D0-brane では

$$\begin{aligned}
F_{ij} &= i\left[X_i,X_j\right] && (181)\\
F_{0j} &= D_0X^i=\partial_0 X_j+i\left[A_0,X_j\right] && (182)\\
D_j\theta &= i\left[X_j,\theta\right] && (183)\\
D_0\theta &= \partial_0\theta+i\left[A_0,\theta\right] && (184)\\
& && (185)
\end{aligned}$$

IIA 理論の無限個の D0-brane は次の（1 次元）行列模型で支配される。

$$\int dt\,\mathrm{Tr}\left\{\frac{1}{2}\left(D_0X^i\right)^2+\frac{1}{4}\left(\left[X^i,X^j\right]\right)^2-i\theta^TD_0\theta+\theta^T\gamma^i\left[X_i,\theta\right]\right\} \tag{186}$$

ただし，$X^i$,$\theta$ は $N\times N$ 行列で，$N\to\infty$ の極限を考える。

この行列模型における散乱の記述から，速度の 4 乗に比例する相互作用がループ計算により求められる。

IIB（0 次元）行列模型も考えられている（川合ら [5]）。

$$S=-\frac{1}{g^2}\mathrm{Tr}\left(\frac{1}{4}\left[A_\mu,A_\nu\right]\left[A^\mu,A^\nu\right]+\frac{1}{2}\bar{\psi}\Gamma^\mu\left[A_\mu,\psi\right]\right) \tag{187}$$

ここで $A_\mu$，$\psi$ は $N\times N$ Hermite 行列。

# 6 String理論におけるduality

## 6.1 superstring theories

massless bosonic な内容は次の通り。

- I : $G_{\mu\nu}$, $B_{\mu\nu}$, $\phi$, $A_\mu$ $(SO(32))$
- IIA: $G_{\mu\nu}$, $B_{\mu\nu}$, $\phi$, $C^{(p')}$ $(p' = 1, 3)$
- IIB: $G_{\mu\nu}$, $B_{\mu\nu}$, $\phi$, $\chi$, $C^{(p')}$ $(p' = 2, 4)$ [9]
- HE: $G_{\mu\nu}$, $B_{\mu\nu}$, $\phi$, $A_\mu$ $(E_8 \times E_8)$
- HO: $G_{\mu\nu}$, $B_{\mu\nu}$, $\phi$, $A_\mu$ $(SO(32))$

  exercise? すべて $G_{\mu\nu}$, $B_{\mu\nu}$, $\phi$ を含んでいるのは，何故でしたっけ？

  superstringでは，2次元のフェルミオン $\psi^\mu$ を含んでいる。閉弦における $\psi^\mu$ は，境界条件により2つのsectorに分類される。

  $$NS: \quad \psi(\sigma + 2\pi) = -\psi(\sigma), \quad R: \quad \psi(\sigma + 2\pi) = \psi(\sigma) \tag{188}$$

  左向きと右向きの成分の合成により，NS-NS およびR-Rセクターは10次元のボゾン場を記述する。（他はフェルミオン。）

## 6.2 S-duality

S-dualityは結合定数 $g_s$ を持つ理論と $1/g_s$ を持つ理論とを結びつける。

- $I \Leftrightarrow HO$
- $IIB \Leftrightarrow IIB$

[9] $\chi$，$C^{(2)}$，$C^{(4)}$ はRR sector

#### 6.2.1 $I \Leftrightarrow HO$

HO の有効場の理論は (bosonic part)

$$S_{HO} = \frac{1}{2\kappa_0^2}\int d^{10}x\sqrt{-g}e^{-2\phi}\left[R + 4(\nabla\phi)^2 - \frac{1}{12}H^2 - \frac{\alpha'}{4}\mathrm{Tr}F^2\right] \tag{189}$$

ここで，次の変換を行う。

$$g_{MN} \to e^{\phi}g_{MN}, \quad \phi \to -\phi \tag{190}$$

すると，以下の I の有効場の理論

$$S_I = \frac{1}{2\kappa_0^2}\int d^{10}x\sqrt{-g}\left[e^{-2\phi}\left(R + 4(\nabla\phi)^2\right) - \frac{1}{12}H^2 - \frac{\alpha'}{4}e^{-\phi}\mathrm{Tr}F^2\right] \tag{191}$$

（$H$ はこの場合 RR sector に由来する。）

S-duality 変換により

- D1-brane in I $\leftrightarrow$ fundamental string in HO
- D5-brane in I $\rightarrow$ NS5-brane in HO

#### 6.2.2 $IIB \Leftrightarrow IIB$

IIB の低エネルギー有効理論は，string frame では[10]

$$\begin{aligned} S_{IIB} &= \frac{1}{2\kappa^2}\left\{\int d^{10}x\sqrt{-g}\left[e^{-2\phi}\left(R + 4(\nabla\phi)^2 - \frac{1}{12}H_{NSNS}^2\right)\right.\right. \\ &\quad \left. -\frac{1}{2}(\nabla\chi)^2 - \frac{1}{12}\left(H_{RR} + \chi H_{NSNS}\right)^2 - \frac{1}{240}F_5^2\right] \\ &\quad \left. + \int A_4 \wedge H_{RR} \wedge H_{NSNS}\right\} \end{aligned} \tag{192}$$

Einstein frame では， IIB の低エネルギー有効理論は次のように書き直すことができる。

$$\begin{aligned} S_{IIB}(Ef) &= \frac{1}{2\kappa^2}\int d^{10}x\sqrt{-g}\left\{R + \frac{1}{4}\mathrm{tr}\left(\nabla_\mu M \nabla^\mu M^{-1}\right)\right. \\ &\quad \left. -\frac{1}{12}H^T_{\mu\nu\rho}MH^{\mu\nu\rho} + \cdots\right\} + \cdots \end{aligned} \tag{193}$$

[10] $F_5 = dA_4 + C^{(2)} \wedge H_{NSNS}$

ここで

$$\tau = \chi + ie^{-\phi} \tag{194}$$

$$M = e^{\phi}\begin{pmatrix} \chi^2 + e^{-2\phi} & \chi \\ \chi & 1 \end{pmatrix} \tag{195}$$

$$H = \begin{pmatrix} dB \\ dC^{(2)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} H_{NSNS} \\ H_{RR} \end{pmatrix} \tag{196}$$

と書ける。

ちなみに，$\chi = 0$ とおくと

$$\begin{aligned} S_{IIB}(Ef) \;=\; & \frac{1}{2\kappa^2}\int d^{10}x\sqrt{-g}\left\{R - \frac{1}{2}(\nabla\phi)^2\right. \\ & \left. - \frac{1}{12}e^{-\phi}H_{NSNS}^2 - \frac{1}{12}e^{\phi}H_{RR}^2\right\} \end{aligned} \tag{197}$$

(193) を不変に保つ変換として次の $SL(2,R)$ がある。[11]

$$M \;\to\; \Lambda M \Lambda^T \tag{198}$$

$$H \;\to\; (\Lambda^T)^{-1}H \tag{199}$$

ここで

$$\Lambda = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL(2,R) \tag{200}$$

（ただし $ad - bc = 1$）とすると[12]

$$\tau \;\to\; \frac{a\tau + b}{c\tau + d} \tag{201}$$

$$H \;\to\; \begin{pmatrix} d & -c \\ -b & a \end{pmatrix} H \tag{202}$$

$e^{\phi}$ は string の結合定数であり，この変換は特に $a = 0, b = 1, c = -1, d = 0$ のとき

$$\tau \to -\frac{1}{\tau} \tag{203}$$

を含むが，これは結合定数の「反転」となる。

comment： 強結合と弱結合の理論が同じ … 2 次元イジング模型

---

[11] 量子論を考えると（Dirac 量子化条件），対称性は $SL(2,Z)$ になってしまう。

[12] $\mathcal{M} = e^{\phi/2}\begin{pmatrix} e^{-\phi} & \chi \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ とすると，$M = \mathcal{M}\mathcal{M}^T$ と書け，変換は $\mathcal{M} \to \Lambda\mathcal{M}$。

exercise

(198) と (201) が等価であることを，$a=1, b=1, c=0, d=1$ のとき，$a=0, b=1, c=-1, d=0$ のときに確かめよ。

S-duality 変換により

- D3-brane → D3-brane
- D1-brane (string) → NS5-brane

NS5-brane の tension は

$$T_{NS5} = \frac{1}{(2\pi)^5 g_s^2 \ell_s^6} \tag{204}$$

### 6.3 T-duality

半径 $R$ の円周上を動く粒子のエネルギー

$$E_n = \frac{n}{R} \tag{205}$$

$R$ の円周に巻き付いたひものエネルギー

$$E_m = \frac{mR}{\alpha'} \tag{206}$$

duality:

$$R \to \frac{\alpha'}{R} \tag{207}$$

は

- $IIA \Leftrightarrow IIB$
- $HO \Leftrightarrow HE$

を結びつける。

### 6.4 U-duality

SUGRA における non-compact 群。

# 7　M-theory

M: magic, mystery, mother, membrane, meta, ...

11 次元 SUGRA は $g_{\mu\nu}$，反対称テンソル場 $C_{\mu\nu\rho}$ を含んでいる。
1 次元（その label を $y$ とする）を半径 $r$ の円周にコンパクト化すると，ボゾン場は以下のように分類される。

$$g_{\mu\nu},\quad g_{\mu y},\quad g_{yy},\quad C_{\mu\nu\rho},\quad C_{\mu\nu y} \tag{208}$$

これは，10 次元 IIA で現れる

$$g_{\mu\nu},\quad A_\mu,\quad \phi,\quad C_{\mu\nu\rho},\quad B_{\mu\nu} \tag{209}$$

と完全に対応している。
弦理論の結合定数 $g_s$ は

$$g_s = \langle e^\phi \rangle \propto r^{3/2} \tag{210}$$

となるので，10 次元 IIA の強結合領域 → 11 次元 SUGRA となることが期待される。[13]

もうすこし対応を見ると，次のようになっている。
11 次元の時空を

$$ds_{11}^2 = e^{-\frac{2}{3}\phi} g^{(10)}_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu + e^{\frac{4}{3}\phi} \left(dy - C_\mu dx^\mu\right)^2 \tag{211}$$

ととると，

$$\sqrt{-g^{(11)}} = e^{-\frac{10}{3}\phi} \sqrt{-g^{(10)}} \tag{212}$$

$$R^{(11)} = e^{\frac{2}{3}\phi} g^{(10)\mu\nu} R^{(10)}_{\mu\nu} + \cdots \tag{213}$$

となるので，11 次元の Hilbert action から，10 次元の string 座標の action が導かれる。

$$\sqrt{-g^{(11)}} R^{(11)} = e^{-2\phi} \sqrt{-g^{(10)}} g^{(10)\mu\nu} R^{(10)}_{\mu\nu} + \cdots \tag{214}$$

11 次元目の半径は

$$r = e^{\frac{2}{3}\phi} \tag{215}$$

[13] IIA の D0-brane は，Kaluza-Klein mode に対応する。

であり，一方（IIA）string theory の結合定数は

$$g_s = e^{\phi} \tag{216}$$

であるから，

$$g_s = r^{3/2} \tag{217}$$

が言える。

11 次元理論で，円周 $(S^1)$ 上にコンパクト化したものは IIA と dual,「線」$(S^1/Z_2)$ 上にコンパクト化したものは HE と dual な関係にある。

$$S^1: \quad y \sim y + 2\pi r$$

$$\mathbf{Z}_2: \quad y \leftrightarrow -y$$

したがって，他の duality とともに，すべてのストリング理論と結びついている！

今のところ，摂動的な解析がストリング理論からできるだけで，フルに非摂動的解析のできる理論モデルは不詳である。

string の D-branes と $D = 11$ の M-branes [14] が duality において本質的役割をしている。

- D2-brane in IIA = M2-brane which is transverse to the compact dimension
- fundamental string in IIA = M2-brane which is wrapped around the compact direction
- NS5-brane in IIA = M5-brane which is transverse to the compact dimension

ちなみに，以下に低エネルギー作用を書いておこう。

[14] M2-brane，M5-brane

IIA の低エネルギー有効理論は，[15]

$$
\begin{aligned}
S_{IIA} &= \frac{1}{2\kappa^2}\left\{\int d^{10}x\sqrt{-g}\left[e^{-2\phi}\left(R+4(\nabla\phi)^2-\frac{1}{12}H^2\right)\right.\right. \\
&\qquad \left.\left.-\frac{1}{4}F_2^2-\frac{1}{48}(F'_4)^2\right]+\frac{1}{2}\int B\wedge F_4\wedge F_4\right\} \qquad (218)
\end{aligned}
$$

11 次元 supergravity は,

$$
S_{11SUGRA}=\frac{1}{16\pi G_{11}}\left\{\int d^{11}x\sqrt{-g}\left[R-\frac{1}{48}F_4^2\right]+\frac{1}{6}\int C^{(3)}\wedge F_4\wedge F_4\right\} \qquad (219)
$$

[15] $F'_4 = dC^{(3)} + A\wedge H$

# 8　BPS 状態

## 8.1　中心荷電

$$\left\{\bar{Q}^I_\alpha, Q^J_\beta\right\} = \delta^{IJ}\left(\gamma^\mu\right)_{\alpha\beta} P_\mu + \delta_{\alpha\beta} Z^{IJ} \tag{220}$$

$Z$: central charge

$$M\delta^{IJ} + \gamma^0 Z^{IJ} = \langle\left\{Q^I_\alpha, Q^J_\alpha\right\}\rangle \geq 0 \tag{221}$$

質量 $M$ は charge $Z$ で与えられる下限を持つ。

$$\left\{\bar{Q}^I_\alpha, Q^J_\beta\right\} = \delta^{IJ}\left(\gamma^\mu\right)_{\alpha\beta} P_\mu + Z^{IJ}_{\alpha\beta} \tag{222}$$

central charge $Z$ のゲージ不変性は $(p+1)$-form と結びついている。

$Q^2 > 0$：質量 $M$ は charge $Z$ で与えられる下限を持つ。

特殊な場合，適当な $Q$ の線形結合は state を消す。より少ない超対称性の状態。BPS 状態

量子効果によってもその性質は変わらない。（くりこみの影響を受けない）

次に「超」簡単な例を示す。（超対称性の入門を兼ねる。[146]）

## 8.2　例：２次元超対称模型

### 8.2.1　free theory

まず，ユークリッド計量でのラグランジアンを考える。

$$\mathcal{L}_{free} = \frac{1}{2}\partial_z\phi\partial_{\bar{z}}\phi + \frac{i}{2}\psi_-\partial_z\psi_- + \frac{i}{2}\psi_+\partial_{\bar{z}}\psi_+ \tag{223}$$

ここで $z = x + it$，$\bar{z} = x - it$。

これは次の超対称変換で不変。

$$\begin{aligned} \delta\phi &= i\epsilon_-\psi_+ + i\epsilon_+\psi_- && (224)\\ \delta\psi_+ &= -\epsilon_-\partial_z\phi && (225)\\ \delta\psi_- &= -\epsilon_+\partial_{\bar{z}}\phi && (226) \end{aligned}$$

ここで $\epsilon_\pm$ は反可換なパラメータ。

反可換なグラスマン数 $\theta_\pm$ を導入する。

$$D_+ = \frac{\partial}{\partial\theta_-} - i\theta_-\frac{\partial}{\partial z}, \quad D_- = \frac{\partial}{\partial\theta_+} - i\theta_+\frac{\partial}{\partial\bar{z}}, \tag{227}$$

を定義する。

$$(D_+)^2 = -i\frac{\partial}{\partial z}, \quad (D_-)^2 = -i\frac{\partial}{\partial\bar{z}}, \quad \{D_+, D_-\} = 0 \tag{228}$$

superfield を次のようにおく。

$$\Phi = \phi + i\theta_-\psi_+ + i\theta_+\psi_- + \theta_+\theta_-F \tag{229}$$

「超対称変換」

$$Q_+ = \frac{\partial}{\partial\theta_-} + i\theta_-\frac{\partial}{\partial z}, \quad Q_- = \frac{\partial}{\partial\theta_+} + i\theta_+\frac{\partial}{\partial\bar{z}}, \tag{230}$$

を定義する。

これらは,

$$\{Q_\pm, D_\pm\} = \{Q_\pm, D_\mp\} = 0 \tag{231}$$

をみたす。

$Q_\pm$ を $\Phi$ に作用させると,

$$Q_+\Phi = i\psi_+ - \theta_+F + i\theta_-\partial_z\phi + \theta_+\theta_-\partial_z\psi_- \tag{232}$$

$$Q_-\Phi = i\psi_- + \theta_-F + i\theta_+\partial_{\bar{z}}\phi - \theta_+\theta_-\partial_{\bar{z}}\psi_+ \tag{233}$$

superfield の超対称変換を

$$\delta\Phi = (\epsilon_-Q_+ + \epsilon_+Q_-)\,\Phi \tag{234}$$

とする。

各成分については

$$\delta\Phi = \delta\phi + i\theta_-\delta\psi_+ + i\theta_+\delta\psi_- + \theta_+\theta_-\delta F, \tag{235}$$

また

$$\begin{aligned}&(\epsilon_-Q_+ + \epsilon_+Q_-)\,\Phi \\ = \; & i\epsilon_-\psi_+ + i\epsilon_+\psi_- + i\theta_-\left(-\epsilon_-\partial_z\phi + i\epsilon_+F\right) \\ & + i\theta_+\left(-\epsilon_+\partial_{\bar{z}}\phi - i\epsilon_-F\right) + \theta_+\theta_-\left(\epsilon_-\partial_z\psi_- - \epsilon_+\partial_{\bar{z}}\psi_+\right)\end{aligned} \tag{236}$$

なので，

$$\begin{aligned} \delta\phi &= i\epsilon_-\psi_+ + i\epsilon_+\psi_- && (237)\\ \delta\psi_+ &= -\epsilon_-\partial_z\phi + iF\epsilon_+ && (238)\\ \delta\psi_- &= -\epsilon_+\partial_{\bar z}\phi - iF\epsilon_- && (239)\\ \delta F &= \epsilon_-\partial_z\psi_- - \epsilon_+\partial_{\bar z}\psi_+ && (240) \end{aligned}$$

を得る。運動方程式を使えば，前と同じになる。
また，$D_\pm$ を $\Phi$ に作用させると，

$$\begin{aligned} D_+\Phi &= i\psi_+ - \theta_+F - i\theta_-\partial_z\phi - \theta_+\theta_-\partial_z\psi_- && (241)\\ D_-\Phi &= i\psi_- + \theta_-F - i\theta_+\partial_{\bar z}\phi + \theta_+\theta_-\partial_{\bar z}\psi_+ && (242) \end{aligned}$$

である。

グラスマン数の積分は次のように定義される。

$$\begin{aligned} \int d\theta_+ &= 0, \qquad \int d\theta_+\ \theta_+ = 1 && (243)\\ \int d\theta_- &= 0, \qquad \int d\theta_-\ \theta_- = 1 && (244) \end{aligned}$$

また

$$\begin{aligned} \int d\theta_+ d\theta_- &= \int d\theta_+ d\theta_-\ \theta_+ = \int d\theta_+ d\theta_-\ \theta_- = 0 && (245)\\ \int d\theta_+ d\theta_-\ \theta_+\theta_- &= -1 && (246) \end{aligned}$$

である。

スーパーフィールドを用いると (223) は次の形に書ける。

$$\int d\theta_+ d\theta_- \frac{1}{2} D_-\Phi D_+\Phi = \mathcal{L}_{free} - \frac{1}{2}F^2 \qquad (247)$$

superfield の超対称変換の最高次の項は全微分の形となる。したがって，任意の superfield $V$ について

$$\int d^2z\ d\theta_+ d\theta_-\ V \qquad (248)$$

は，超対称変換で不変となる。

#### 8.2.2 interaction

$$\int d\theta_+ d\theta_-\ W(\Phi) \tag{249}$$

を考える。

$$W(\Phi) = W(\phi) + W'(\phi)\Phi + \frac{1}{2}W''(\phi)\Phi\Phi \tag{250}$$

を用いて，積分を実行すると

$$-W'(\phi)F - W''(\phi)\psi_+\psi_- \tag{251}$$

となる。ここで $W'(\Phi) = \frac{\partial W}{\partial \phi}$ などである。
　これと (247) をあわせると

$$\begin{aligned}\mathcal{L} &= \frac{1}{2}\partial_z\phi\partial_{\bar{z}}\phi + \frac{i}{2}\psi_-\partial_z\psi_- + \frac{i}{2}\psi_+\partial_{\bar{z}}\psi_+ \\ &\quad -\frac{1}{2}F^2 - W'(\phi)F - W''(\phi)\psi_+\psi_-\end{aligned} \tag{252}$$

　補助場 $F$ について変分すると

$$F = -W'(\phi) \tag{253}$$

　これを用いて補助場を消去すると

$$\begin{aligned}\mathcal{L} &= \frac{1}{2}\partial_z\phi\partial_{\bar{z}}\phi + \frac{i}{2}\psi_-\partial_z\psi_- + \frac{i}{2}\psi_+\partial_{\bar{z}}\psi_+ \\ &\quad +\frac{1}{2}W'(\phi)^2 - W''(\phi)\psi_+\psi_-\end{aligned} \tag{254}$$

　ここから先，Minkowski 計量に持っていくのだけれども，check できません $\cdots$ 誰かきっちりやってみて。

　Minkowski 計量では，$\psi_\pm$ は互いに独立で実である。これらをまとめて Majorana spinor として表してみる。

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi_+ \\ \psi_- \end{pmatrix} \tag{255}$$

$$\bar{\psi} = \begin{pmatrix} \psi_+^* & \psi_-^* \end{pmatrix}\sigma_2 = (i\psi_- \quad -i\psi_+) \tag{256}$$

変換パラメータは

$$\epsilon = \begin{pmatrix} -\epsilon_+ \\ \epsilon_- \end{pmatrix} \tag{257}$$

$$\bar{\epsilon} = (i\epsilon_- \quad i\epsilon_+) \tag{258}$$

とおく。

ガンマ行列は

$$\gamma_0 = \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma_1 = i\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \tag{259}$$

$$\gamma_5 = \gamma_0\gamma_1 = \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{260}$$

とする。

$$\bar{\epsilon}\psi = \bar{\psi}\epsilon, \quad \bar{\psi}\gamma_5\psi = 0 \tag{261}$$

となる。

ラグランジアン (254) は

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= -\frac{1}{2}\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi + \frac{i}{2}\bar{\psi}\gamma^\mu\partial_\mu\psi \\ &\quad -\frac{1}{2}W'(\phi)^2 - \cdots \end{aligned} \tag{262}$$

と書ける。

### 8.2.3 soliton と central charge

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= -\frac{1}{2}\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi + \frac{i}{2}\bar{\psi}\gamma^\mu\partial_\mu\psi \\ &\quad -\frac{1}{2}W'(\phi)^2 - \cdots \end{aligned} \tag{263}$$

super charge を次のようにする。

$$Q_+ = \int dx\,[(\partial_0\phi + \partial_1\phi)\,\psi_+ - W'(\phi)\psi_-] \tag{264}$$

$$Q_- = \int dx\,[(\partial_0\phi - \partial_1\phi)\,\psi_- + W'(\phi)\psi_+] \tag{265}$$

正準交換関係

$$[\phi(x,t), \partial_0\phi(y,t)] = i\delta(x-y), \quad \{\psi_\pm, \psi_\pm\} = \delta(x-y), \quad \{\psi_\pm, \psi_\mp\} = 0 \tag{266}$$

を用いると

$$Q_+^2 = P_+, \quad Q_-^2 = P_- \tag{267}$$

ここで $P_\pm = P_0 \pm P_1$，$P_0$，$P_1$ はそれぞれエネルギーと運動量である。

表面項をきちんと取り扱うと，

$$T \equiv Q_+Q_- + Q_-Q_+ = -2\int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{\partial W}{\partial x} \tag{268}$$

となる。系にトポロジカルな励起（ソリトン）があると，一般に $T$ は 0 とならない。$T$ は他の物理量と可換で，中心荷電と呼ばれる。

<u>例 1</u>

$$W' = \lambda\left(\phi^2 - a^2\right) \tag{269}$$

のとき

ポテンシャルは

$$\frac{1}{2}\lambda^2\left(\phi^2 - a^2\right)^2 \tag{270}$$

この場合

$$T = \int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{\partial}{\partial x}\left(2a^2\lambda\phi - \frac{2}{3}\lambda\phi^3\right) \tag{271}$$

<u>例 2</u>

$$W' = \sin\phi \tag{272}$$

のとき

ポテンシャルは

$$\frac{1}{2}\sin^2\phi \tag{273}$$

この場合

$$T = \int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{\partial}{\partial x}\left(2\cos\phi\right) \tag{274}$$

$$Q_+^2 = P_+, \quad Q_-^2 = P_-, \quad Q_+Q_- + Q_-Q_+ = T \tag{275}$$

より

$$P_+ + P_- = T + (Q_+ - Q_-)^2 = -T + (Q_+ + Q_-)^2 \tag{276}$$

であるから $P_+ + P_- \geq |T|$。一粒子の状態では $P_+ = P_- = M$ なので

$$M \geq \frac{1}{2}|T| \tag{277}$$

（Bogomolnyi の不等式）

等号の成り立つ場合は

$$Q_+ + Q_- = 0 \tag{278}$$

または

$$Q_+ - Q_- = 0 \tag{279}$$

で，super charge の表式より

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = \pm W' \tag{280}$$

これはソリトンの配位を決める式である。
ソリトンが Bogomolnyi の不等式を saturate する。

実際，エネルギーは（フェルミオンは落とす）

$$\begin{aligned} E &= \int_{-\infty}^{\infty} dx \left[\frac{1}{2}\left(\frac{\partial \phi}{\partial x}\right)^2 + \frac{1}{2}W'^2\right] \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} dx \left[\frac{1}{2}\left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \mp W'\right)^2 \pm \frac{\partial \phi}{\partial x}W'\right] \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} dx \left[\frac{1}{2}\left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \mp W'\right)^2\right] \mp \frac{1}{2}T \end{aligned} \tag{281}$$

## 8.3 例：$\mathcal{N} = 2$ super Yang-Mills

4 次元では

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \mathrm{Tr}\Big(-\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - \frac{1}{2}(D_\mu P)^2 - \frac{1}{2}(D_\mu S)^2 - \frac{e^2}{2}[S, P]^2 \\ &\quad + i\bar{\psi}\gamma^\mu D_\mu \psi - e\bar{\psi}[S, \psi] - e\bar{\psi}\gamma_5[P, \psi]\Big) \end{aligned} \tag{282}$$

すべての場は $SU(2)$ valued。
このラグランジアンは次の超対称変換の下で不変。

$$\begin{aligned}
\delta A_\mu &= i\bar{\alpha}\gamma_\mu\psi - i\bar{\psi}\gamma_\mu\alpha && (283)\\
\delta P &= \bar{\alpha}\gamma_5\psi - \bar{\psi}\gamma_5\alpha && (284)\\
\delta S &= i\bar{\alpha}\psi - i\bar{\psi}\alpha && (285)\\
\delta\psi &= \left(\sigma^{\mu\nu}F_{\mu\nu} - \gamma^\mu D_\mu S + i\gamma^\mu D_\mu P\gamma_5 - i\left[P,S\right]\gamma_5\right)\alpha && (286)
\end{aligned}$$

$\alpha$ はグラスマン数の (Dirac) spinor パラメータ。

この系で，BPS monopople をつくることができて，

$$B_i = D_i S \tag{287}$$

を満たす。
この背景場の上でフェルミオンの変換は

$$\delta\psi = \left(\sigma^{\mu\nu}F_{\mu\nu} - \gamma^\mu D_\mu S\right)\alpha \tag{288}$$

ここで

$$\Gamma_5 \equiv \gamma_0\gamma_5 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{289}$$

と書くと，(287) より

$$\delta\psi = \gamma^i B_i \left(1 - \Gamma_5\right)\alpha \tag{290}$$

このことから，BPS monopole 場のある場合，超対称性は半分だけ破れることがわかる。

## 8.4 IIA と 11 dim. SUGRA

IIA では

$$\begin{aligned}
\{Q_\alpha, Q_\beta\} &= (\Gamma^M C)_{\alpha\beta}P_M + (\Gamma_{11}C)_{\alpha\beta}Z\\
&\quad +(\Gamma^M\Gamma_{11}C)_{\alpha\beta}Z_M + (\Gamma^{MN}C)_{\alpha\beta}Z_{MN}\\
&\quad +(\Gamma^{MNPQ}\Gamma_{11}C)_{\alpha\beta}Z_{MNPQ}\\
&\quad +(\Gamma^{MNPQR}C)_{\alpha\beta}Z_{MNPQR} && (291)
\end{aligned}$$

右辺の成分の数は

$$10 + 1 + 10 + 45 + 210 + 252 = 528 \tag{292}$$

11 次元理論では

$$\begin{aligned} \{Q_\alpha, Q_\beta\} &= (\Gamma^M C)_{\alpha\beta} P_M \\ &\quad +(\Gamma^{MN} C)_{\alpha\beta} Z_{MN} \\ &\quad +(\Gamma^{MNPQR} C)_{\alpha\beta} Z_{MNPQR} \end{aligned} \tag{293}$$

右辺の成分の数は

$$11 + 55 + 462 = 528 \tag{294}$$

$Z_{MN}$ は M-2-brane によって担われる荷電に対応。
$Z_{MNPQR}$ は M-5-brane によって担われる荷電に対応。

11 次元でみるとすっきりしてくる。?
IIB など，くわしくは [57] p. 486 を見よ。

# 9　ブラックホール

## 9.1　ブラックホールの熱力学

Schwarzschild 時空

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2M}{r}\right) dt^2 + \frac{dr^2}{1 - \frac{2M}{r}} + r^2 d\Omega^2 \tag{295}$$

$t \to i\tau$ とユークリッド化してみる。

$$ds_{Euc}^2 = \left(1 - \frac{2M}{r}\right) d\tau^2 + \frac{dr^2}{1 - \frac{2M}{r}} + r^2 d\Omega^2 \tag{296}$$

horizon の近くでどうなっているだろう？
$R \equiv \sqrt{r - 2M}$ という座標を使うと $R \approx 0$ のあたりでは,

$$ds_{Euc}^2 \approx 8M \left[ dR^2 + R^2 \left(\frac{d\tau}{4M}\right)^2 \right] \tag{297}$$

（球面の項は省略）

一般には，$R = 0$ は singular (conical singularity) であるが，$\tau$ を周期 $\beta$ をもつ（角度）座標だとすると，

$$\beta = 8\pi M \tag{298}$$

のとき,「原点」は regular になる。

一方，量子論では，時間推進演算子

$$e^{iHt} \tag{299}$$

は，ユークリッド化すると

$$e^{-H\tau} \tag{300}$$

となり，さらに $\tau$ が周期 $\beta$ をもつとすると，その周期部分

$$e^{-\beta H} \tag{301}$$

は Boltzmann factor を与え，有限温度の理論を記述する。
$\beta$ は温度の逆数となる。

したがって，black hole の背景では，温度

$$T_H = \frac{1}{8\pi M} \tag{302}$$

の系にいるのと等価である。$T_H$ を Hawking 温度という。
ちなみに，

$$T_H = \frac{\kappa}{2\pi} \tag{303}$$

ここで $\kappa$ はブラックホール表面の重力（加速度）。[16]

熱力学関係式

$$dU = TdS - pdV \tag{304}$$

において，内部エネルギー $U$ を black hole の質量 $M$ と同一視する。（そして $dV = 0$）
さらに温度は Hawking 温度とおくと

$$dM = T_H dS \tag{305}$$

すなわち

$$dS = 8\pi M dM \tag{306}$$

積分すると

$$S = 4\pi M^2 = \frac{4\pi(2M)^2}{4} = \frac{A}{4} \tag{307}$$

ここで $A$ は horizon の表面積。
ブラックホールはエントロピーをもっている！[17]

一般のブラックホールでも，エントロピー $S$ は $A/4$ と表せる。[18]

## 9.2 string とブラックホール

string soliton の重ね合わせでブラックホールのようなものがつくれる。
string の状態数を数えることで熱力学的にエントロピーが計算できる。
BPS 状態に対応したものを Extremal black hole とよぶ。
そこでは超対称性があるため，弱結合で計算したものが強結合でも成り立つと期待される。
D-branes を用いて extremal black hole のエントロピーを計算できる。

[16] 太陽質量の black hole では，$T_H \sim 10^{-7}$K。
[17] 太陽質量の black hole では，$S \sim 10^{77}$。
[18] $G$ を復活させると，$S = \frac{A}{4G}$。

４次元では

$$G \sim g_s^2 \ell_s^2 \tag{308}$$

D-brane の質量は

$$M \sim \frac{1}{g_s \ell_s} \tag{309}$$

horizon の半径はだいたい

$$GM \sim g_s \ell_s \tag{310}$$

したがってエントロピーは

$$S \sim \frac{A}{G} \sim O(1) \tag{311}$$

$g_s$ によらない！

ブラックホールのエントロピーはホライズンの面積に比例するという，Bekenstein-Hawking の結果を導き出せる。
information paradox の解決？

## 9.3　例：5 次元ブラックホール

IIB を考える。
$Q_1$ 本の重なった D1 brane。
$Q_5$ 枚の重なった D5 brane。　D1 はこの D5 の中に埋め込まれている。
D1 方向に運動量を与える。この方向は半径 $R$ の $S^1$ にコンパクト化。
残りの余分な４次元はトーラスにコンパクト化。

string-frame metric: [19]

$$\begin{aligned} ds^2 &= f_1^{-1/2} f_5^{-1/2} \left( -dt^2 + dx_9^2 + \frac{c_n n}{r^2} (dt - dx_9)^2 \right) \\ &\quad + f_1^{1/2} f_5^{1/2} \left( dx_1^2 + \cdots + dx_4^2 \right) + f_1^{1/2} f_5^{-1/2} \left( dx_5^2 + \cdots + dx_8^2 \right) \end{aligned} \tag{312}$$

$$e^{-2(\phi_{10} - \phi_\infty)} = f_5 f_1^{-1} \tag{313}$$

[19] この metric ($n = 0$) は $AdS_3/CFT_2$ 対応の場合にも使われる。

$$B'_{09} = \frac{1}{2}(f_1^{-1} - 1) \tag{314}$$

$$H'_{ijk} = dB'_{ijk} = \frac{1}{2}\epsilon_{ijk\ell}\partial_\ell f_5 \tag{315}$$

$i, j, k, \ell = 1, 2, 3, 4$

$$f_1 = \left(1 + \frac{c_1 Q_1}{r^2}\right), \quad f_5 = \left(1 + \frac{c_5 Q_5}{r^2}\right) \tag{316}$$

$$c_1 = \frac{4G_5 R}{\pi\alpha' g_s}, \quad c_5 = g_s\alpha', \quad c_n = \frac{4G_5}{\pi R} \tag{317}$$

$r^2 = x_1^2 + \cdots + x_4^2$

次元を落とすと，[20] Einstein-frame metric:

$$ds_E^2 = -\lambda^{-2/3}dt^2 + \lambda^{1/3}\left(dr^2 + r^2 d\Omega_3^2\right) \tag{318}$$

を得る。

ここで

$$\lambda = \left(1 + \frac{c_1 Q_1}{r^2}\right)\left(1 + \frac{c_5 Q_5}{r^2}\right)\left(1 + \frac{c_n n}{r^2}\right) \tag{319}$$

$$c_1 c_5 c_n = \left(\frac{4G_5}{\pi}\right)^2 \tag{320}$$

を満たすことに注意。

$r \to 0$ の極限で，線素の $d\Omega_3^2$ の係数は constant になることに注意。

$r = 0$ は singularity ではなく，horizon。

これはホントにブラックホール？

特別な場合 $c_1 Q_1 = c_5 Q_5 = c_n n = \rho_0^2$ を考えよう。

このとき

$$\begin{aligned} ds^2 &= -\left(1 + \frac{\rho_0^2}{r^2}\right)^{-2} dt^2 + \left(1 + \frac{\rho_0^2}{r^2}\right)\left(dr^2 + r^2 d\Omega_3^2\right) \\ &= -\left(1 - \frac{\rho_0^2}{\rho^2}\right)^2 dt^2 + \frac{d\rho^2}{\left(1 - \frac{\rho_0^2}{\rho^2}\right)^2} + \rho^2 d\Omega_3^2 \end{aligned} \tag{321}$$

ここで，$\rho^2 = r^2 + \rho_0^2$ とした。

これは 5 次元の extreme RN black hole。

[20] 因子 $\left(1 + \frac{c_n n}{r^2}\right)$ を出すとこが難しいですね。

$S^3$ の面積は $2\pi^2$(半径)$^3$ なので，エントロピーは

$$S = \frac{A}{4G_5} = 2\pi\sqrt{Q_1Q_5n} \tag{322}$$

string theory 的に考える。
ボゾン，フェルミオンの自由度は各

$$4Q_1Q_5 \tag{323}$$

個ある。このときの弦の振動状態で，運動量 $n/R$ をもつものの縮退度が状態の数。
$n$ が大きいときは

$$d \sim \exp\left(2\pi\sqrt{\frac{cn}{6}}\right) \tag{324}$$

今は

$$c = 4Q_1Q_5 + \frac{1}{2}4Q_1Q_5 = 6Q_1Q_5 \tag{325}$$

なので，
エントロピーは

$$S = \ln d = 2\pi\sqrt{Q_1Q_5n} \tag{326}$$

となって，さきの計算と一致する。

$$\prod_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1+q^n}{1-q^n}\right)^{4Q_1Q_5} = \sum d_n q^n \tag{327}$$

$$\prod_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1+q^n}{1-q^n}\right)^{-1} = \vartheta_4(q) = \left(-\frac{\ln q}{\pi}\right)^{-1/2}\vartheta_2(e^{\pi/\ln q}) \tag{328}$$

を用いると

$$G(q) = \prod_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1+q^n}{1-q^n}\right)^{4Q_1Q_5} \sim \exp\left(-\frac{\pi^2Q_1Q_5}{\ln q}\right) \tag{329}$$

$$d_n = \frac{1}{2\pi i}\oint\frac{G(q)}{q^{n+1}}dq \tag{330}$$

により $d_n$ を求める。

被積分関数は（大きな $n$ について，$n+1\sim n$）

$$\begin{aligned} & \exp\left[-\frac{\pi^2 Q_1 Q_5}{\ln q} - n\ln q\right] \\ = \; & \exp\left[-\left(\sqrt{\frac{\pi^2 Q_1 Q_5}{\ln q}} + \sqrt{n\ln q}\right)^2 + 2\pi\sqrt{Q_1 Q_5 n}\right] \end{aligned} \tag{331}$$

を含むので，saddle point で評価すると

$$d_n \sim \exp\left(2\pi\sqrt{Q_1 Q_5 n}\right) \tag{332}$$

# 10 AdS/CFT

## 10.1 AdS/CFT とは？

anti-de Sitter 時空は，branes の近くの時空。
conformal field theory は，高い対称性を持つ AdS の境界に現れる。

$string\ theory \Leftrightarrow field\ theory$
$gravity \Leftrightarrow Yang\text{-}Mills\ theory$

## 10.2 brane

### 10.2.1 概論

$D = 10, 11$
metric は

$$ds_E^2 = H^{-\frac{2}{p+1}}\left(-dt^2 + \sum_{m=1}^{p} dX_m^2\right) + H^{\frac{2}{D-p-3}} \sum_{m=p+1}^{D-1} dX_m^2 \tag{333}$$

$(p+1)$-form は

$$A_{01\cdots p} \sim H^{-1} - 1 \tag{334}$$

$$H = 1 + \left(\frac{R}{r}\right)^{D-p-3} = 1 + \left(\frac{R}{r}\right)^{\frac{p+1}{w}} \tag{335}$$

ここで

$$r^2 = \sum_{m=p+1}^{D-1} X_m^2 \tag{336}$$

$$R^4 = gN\alpha' \tag{337}$$

$$R^6 = N\ell_p^6 \tag{338}$$

ホライズンの近くでは

$$H_{hor} = \lim_{r\to 0} H = \left(\frac{R}{r}\right)^{D-p-3} \tag{339}$$

あるいは $N$ の大きい極限。（$N$ は brane の枚数。$SU(N)$ gauge theory と結びつけられる。）[21]

[21] あるいは特殊な duality 変換により，$H$ の中の定数が消せる。

ホライズンの近くでは

$$ds^2_{hor} = \left(\frac{r}{R}\right)^{2w} dx^2_\mu + \left(\frac{R}{r}\right)^2 dr^2 + R^2 d\Omega^2_{D-p-2} \tag{340}$$

$$\left(\frac{R}{r}\right)^{1/w} = z \tag{341}$$

とおき，$x_\mu$ を適当に scale すると

$$ds^2_{hor} = \frac{(wR)^2}{z^2}\left(dx^2_\mu + dz^2\right) + R^2 d\Omega^2_{D-p-2} \tag{342}$$

$w=1$ ならば，$AdS_{p+2} \times S^{D-p-2}$ は conformally flat。

$$w = 1 \leftrightarrow p+1 = D-p-3 \leftrightarrow p = \frac{D-4}{2} \tag{343}$$

これを満たすのは

- $D=10$, $p=3$ $(AdS_5 \times S^5)$
- $D=6$, $p=1$ (string) $(AdS_3 \times S^3 \times K3\ (or\ T^4))$
- $D=4$, $p=0$ (black hole) (section 10.5)

#### 10.2.2 D$p$ brane in 10 dim.

$(p+1)$ 次元 world volume での Yang-Mills 理論の coupling は（次元解析より）[22]

$$g^2_{YM} = g_s \ell_s^{p-3} \tag{344}$$

ここで $\ell_s^2 = \alpha'$。

一般に，$SU(N)$ Y-M ではエネルギースケールに依存する coupling が考えられる。

$$g^2_{eff}(E) = g^2_{YM} N E^{p-3} \tag{345}$$

$N$ 枚の D$p$-brane が重なった場合を考える。

string-frame metric:

$$ds^2_S = f^{-1/2}(ds^2)_{p+1} + f^{1/2}(ds^2)_{9-p} \tag{346}$$

[22] $\frac{1}{g^2_{YM}} F^2 \sim \frac{1}{\ell_s^{p-3}} e^{-\phi} F^2$

dilaton:

$$e^{2\phi} = g_s^2 f^{\frac{3-p}{2}} \tag{347}$$

RR gauge field:

$$C_{01\cdots p} = -\frac{1}{2}(f^{-1} - 1) \tag{348}$$

$$(ds^2)_{p+1} = -dt^2 + dx_1^2 + \cdots + dx_p^2 \tag{349}$$

$$(ds^2)_{9-p} = dx_{p+1}^2 + \cdots + dx_9^2 = dr^2 + r^2 d\Omega_{8-p}^2 \tag{350}$$

$$f = 1 + \left(\frac{R}{r}\right)^{7-p} \tag{351}$$

ここで[23]

$$\begin{aligned} R^{7-p} &\sim G_{10-p} M \sim \frac{G_{10}}{V_p} M = G_{10} \frac{M}{V_p} = G_{10} N T_p \\ &\sim (g_s^2 \ell_s^8) N \frac{1}{\ell_s^{p+1} g_s} \sim g_s N l_s^{7-p} \end{aligned} \tag{352}$$

したがって

$$f = 1 + \frac{d_p g_{YM}^2 N}{\ell_s^4 U^{7-p}} \tag{353}$$

$d_p$ は定数。

$$\begin{aligned} d_p &= 2^{5-p} \pi^{\frac{5-p}{2}} \Gamma\left(\frac{7-p}{2}\right) \\ &= \frac{(2\pi)^{7-p}}{(7-p)\frac{2\pi^{\frac{9-p}{2}}}{\Gamma\left(\frac{9-p}{2}\right)}} \end{aligned} \tag{354}$$

（$p = 3$ のとき $d_p = 4\pi$）

物理にあまり関係ないのでここでは（ことわらない限り）単純に $d_p$ を 1 とおく。

$$U = \frac{r}{\ell_s^2} \tag{355}$$

[23] $16\pi G_{10} = 2\kappa^2 = (2\pi)^7 \ell_s^8 g_s^2$，$T_p^{-1} = (2\pi)^p \ell_s^{p+1} g_s$

$U$ は $r=0$ にある D brane から $r$ の距離まで伸びた string のエネルギーに相当する。

horizon ($r=0$) の近くを考える。これは $U$ を固定したまま $\ell_s \to 0$ の極限をとることと等価である。このとき

$$ds^2 \to \ell_s^2 \left\{ \frac{1}{\sqrt{\lambda}} U^{\frac{7-p}{2}} (ds^2)_{p+1} + \sqrt{\lambda} U^{\frac{p-7}{2}} dU^2 + \sqrt{\lambda} U^{\frac{p-3}{2}} d\Omega_{8-p}^2 \right\} \tag{356}$$

ここで

$$\lambda = g_{YM}^2 N \tag{357}$$

そして

$$e^{\phi} \to \frac{1}{N} \left[ g_{eff}(U) \right]^{\frac{7-p}{2}} \tag{358}$$

$g_{eff}^2 << N^{4/(7-p)}$ のとき，string は弱結合をする。

また曲率は $[\ell_s^2 g_{eff}(U)]^{-1}$ の程度である。

したがって，string の mode（あるいは曲率の効果）が無視できるためには，$g_{eff}^2(U) >> 1$ でなくてはならない。$p < 6$ ならば $N >> 1$ のときに弱結合と両立する。

$p=3$ のときは，near-horizon metric は

$$ds^2 = \ell_s^2 \left\{ \frac{1}{\sqrt{\lambda}} U^2 (ds^2)_4 + \frac{\sqrt{\lambda}}{U^2} dU^2 + \sqrt{\lambda} d\Omega_5^2 \right\} \tag{359}$$

となり，dilaton は一定である：

$$e^{\phi} = g_s \tag{360}$$

$z \equiv \sqrt{\lambda}/U$ を用いると，(359) は

$$ds^2 = \ell_s^2 \sqrt{\lambda} \left\{ \frac{(ds^2)_4 + dz^2}{z^2} + d\Omega_5^2 \right\} \tag{361}$$

となる。

これは，$AdS_5 \times S^5$ を表しており，両方の「半径」は共通で

$$R = \lambda^{1/4} \ell_s \tag{362}$$

となっている。

stringの効果は$\lambda >> 1$では抑えられている。また，量子補正は$N >> 1$のとき小さい。なぜならば今$\ell_p = g_s^{1/4}\ell_s$，$\lambda = g_s N$であるから。

RR gauge field の self-dual な場の強さは

$$\begin{aligned} F_5 &= \frac{N\sqrt{\pi}}{2Vol(S^5)}(vol_{S^5} + *vol_{S^5}) \\ &\sim N((vol)_{AdS_5} + (vol)_{S^5}) \end{aligned} \tag{363}$$

$Vol(S^5)$ は $S^5$ の体積，$vol$ は volume form。

$AdS_5 \times S^5$ の isometry は

$$SO(4,2) \times SO(6) \approx SU(2,2) \times SU(4) \tag{364}$$

である。[24]

## 10.3 AdS

### 10.3.1 AdS の構成

$\mathbf{R}^{d+2}$ における超曲面

$$x_1^2 + \cdots + x_d^2 - X_1^2 - X_2^2 = -1 \tag{365}$$

この超曲面上の metric

$$ds^2 = \sum dx_i^2 - \sum dX_j^2 \tag{366}$$

をつくろう。

$$x_i = \sinh\alpha \hat{x}_i, \qquad \sum_{i=1}^{d} \hat{x}_i^2 = 1, \tag{367}$$

$$X_1 = \cosh\alpha\cos\theta, \tag{368}$$

$$X_2 = \cosh\alpha\sin\theta \tag{369}$$

とすれば,

$$ds^2 = -\cos^2\alpha d\theta^2 + d\alpha^2 + \sinh^2\alpha d\Omega^2 \tag{370}$$

[24] $SO(6)$ の generator の数は，$6\cdot 5/2 = 15$，$SU(4)$ の generator の数は，$4^2 - 1 = 15$。

$r = \sinh\alpha$，$t = \theta$ と置けば，次のようになる。

$$ds^2 = -\left(1 + r^2\right) dt^2 + \frac{dr^2}{1 + r^2} + r^2 d\Omega^2 \tag{371}$$

（もとの $\theta$ は compact だったので，厳密には，AdS の covering space を考えることになる。）

<u>exercise</u>

この metric を isotropic coordinate で書いて見よ。

また，(371) において，$r = \tan\rho$ とおくと

$$ds^2 = \frac{1}{\cos^2\rho}\left(-dt^2 + d\rho^2 + \sin^2\rho d\Omega^2\right) \tag{372}$$

boundary は $\rho = \pi/2$ に位置する。

$$(z, y^\mu) = ((X_1 + x_d)^{-1}, X_2 z, x_i z) \qquad (i = 1, \cdots, d-1) \tag{373}$$

ととると $AdS_{d+1}$ の計量は

$$ds^2 = \frac{1}{z^2}\left((ds^2)_d + dz^2\right) \tag{374}$$

となる。[25]

<u>exercise</u>

これを確かめよ。((374) から計算したほうが早い。)

空間的無限遠 $(r \to \infty)$ は $z = 0$ に対応。

別の parametrization

$$X_1 = \frac{1 + Y^2}{1 - Y^2}, \quad x_\mu = \frac{2Y^\mu}{1 - Y^2} \tag{375}$$

ここで $\mu = 1, \cdots, d, d+1$，$x_{d+1} = X_2$ とする。

また，$Y^2 = Y_1^2 + \cdots + Y_d^2 - Y_{d+1}^2$ である。

このとき

$$ds^2 = \frac{4}{(1 - Y^2)^2} dY^2. \tag{376}$$

[25] $(ds^2)_d$ の計量は $(- + \cdots +)$。

### 10.3.2 AdS の対称性

AdS space:

$$ds^2 = \frac{1}{\sqrt{\lambda}} U^2 dx^\mu dx_\mu + \frac{\sqrt{\lambda}}{U^2} dU^2 \tag{377}$$

４次元の special conformal 変換は

$$\delta x^\mu = -2(\epsilon \cdot x) x^\mu + \epsilon^\mu x^2 \tag{378}$$

である。

(377) の metric を不変にする対称性は

$$\begin{aligned} \delta x^\mu &= -2(\epsilon \cdot x) x^\mu + \epsilon^\mu x^2 + \epsilon^\mu \frac{\lambda}{U^2} && (379) \\ \delta U &= 2(\epsilon \cdot x) U && (380) \end{aligned}$$

４次元の special conformal 不変性を「回復」するには，$U \to \infty$。

（４次元の special conformal 変換＋ $\delta U$ は，$U^2 dx^\mu dx_\mu$ を不変に保つ。）

$$\delta(U^2) = 2U\delta U = 4(\epsilon \cdot x) U^2 \tag{381}$$

$$\delta dx^2 = 2dx \cdot d\delta x = -4(\epsilon \cdot x) dx^2 - 4(\epsilon \cdot dx) \frac{\lambda dU}{U^3} \tag{382}$$

$$\delta \frac{U^2}{\sqrt{\lambda}} dx^2 = \frac{\delta U^2}{\sqrt{\lambda}} dx^2 + \frac{U^2}{\sqrt{\lambda}} \delta dx^2 = -4\sqrt{\lambda}(\epsilon \cdot dx) \frac{dU}{U} \tag{383}$$

$$\delta(U^{-2}) = -2\frac{1}{U^3}\delta U = -4(\epsilon \cdot x)\frac{1}{U^2} \tag{384}$$

$$\delta(dU^2) = 2dU d\delta U = 4(\epsilon \cdot dx) U dU + 4(\epsilon \cdot x) dU^2 \tag{385}$$

$$\delta \frac{\sqrt{\lambda}}{U^2} dU^2 = \sqrt{\lambda}\delta(U^{-2}) dU^2 + \frac{\sqrt{\lambda}}{U^2}\delta(dU^2) = 4\sqrt{\lambda}(\epsilon \cdot dx)\frac{dU}{U} \tag{386}$$

<u>exercise</u>

special conformal変換

$$\delta_\epsilon x^\mu = -2(\epsilon \cdot x) x^\mu + \epsilon^\mu x^2 \tag{387}$$

は,

dilatation

$$\delta_D x^\mu = D\ x^\mu \tag{388}$$

並進

$$\delta_a x^\mu = a^\mu \tag{389}$$

回転

$$\delta_\Sigma x^\mu = \Sigma^\mu{}_\nu x^\nu \tag{390}$$

とともに群をなすことを示せ。?

<u>exercise</u>

finite な special conformal 変換は

$$\frac{x'^\mu}{x'^2} = \frac{x^\mu}{x^2} + \alpha^\mu \tag{391}$$

と書ける。さきほどの無限小変換の形を確かめよ。

## 10.4 superconformal symmetry

### 10.4.1 conformal symmetry

４次元の conformal group は回転 $M_{ij}$，並進 $P_i$，conformal boost $K_i$，dilatation $D$ からなる。

$$\begin{aligned} M_{ij} &= x^i \frac{\partial}{\partial x^j} - x^j \frac{\partial}{\partial x^i} && (392)\\ P_i &= \frac{\partial}{\partial x^i} && (393)\\ K_i &= |\mathbf{x}|^2 \frac{\partial}{\partial x^i} - 2x^i x^j \frac{\partial}{\partial x^j} && (394)\\ D &= x^i \frac{\partial}{\partial x^i} && (395)\end{aligned}$$

これらの演算子の間の交換関係は,

$$M_{6i} \equiv \frac{1}{2}(P_i + K_i), \quad M_{i5} \equiv \frac{1}{2}(P_i - K_i), \quad M_{65} \equiv D \tag{396}$$

のように $Mij$ を 6 次元に拡張すると，次のように書ける。

$$[M_{IJ}, M_{KL}] = \eta_{JK} M_{IL} - \eta_{JL} M_{IK} - \eta_{IK} M_{JL} + \eta_{IL} M_{JK} \tag{397}$$

ここで

$$\eta_{IJ} = diag.\,(\eta_{ij}, +1, -1) = (-+++\,+-) \tag{398}$$

したがって，対称群は $SO(4,2)$。

<u>exercise</u>

6 次元の metric が (398) のとき，6 次元の座標を $Y^I$ とすると

$$M_{IJ} = Y_I \frac{\partial}{\partial Y_J} - Y_J \frac{\partial}{\partial Y_I} \tag{399}$$

は (397) を満たすことを示せ。

### 10.4.2 superconformal algebra

象徴的に書くと，次のようになる。

$$\begin{array}{ll}
[M, M] \sim M & [M, P] \sim P \\
[M, K] \sim K & [M, D] = 0 \\
[D, P] \sim P & [D, K] \sim K \\
[P, K] \sim M + D & \\
[D, Q] \sim Q & [D, S] \sim S \\
[K, Q] \sim S & [P, S] \sim Q \\
\{Q, Q\} \sim P & \{S, S\} \sim K \\
\{Q, S\} \sim M + D + R &
\end{array} \tag{400}$$

### 10.4.3 brane と superconformal symmetry

$$ds^2_{hor} = \underbrace{\left(\frac{r}{R}\right)^{\frac{2(D-p-3)}{p+1}} \left(-dt^2 + \sum_{m=1}^{p} dX_m^2\right) + \left(\frac{R}{r}\right)^2 dr^2}_{AdS_{p+2}} + \underbrace{R^2 d^2\Omega}_{S^{D-p-2}} \tag{401}$$

Isometry group $SO(p+1,2) \times SO(D-p-1)$

$$[M_{\mu\nu}, M_{\rho\sigma}] = \eta_{\mu[\rho} M_{\sigma]\nu} - \eta_{\nu[\rho} M_{\sigma]\mu} \tag{402}$$

$$[P_\mu, M_{\nu\rho}] = \eta_{\mu[\nu} P_{\rho]} \tag{403}$$

$$[P_\mu, P_\nu] = \frac{1}{2R^2} M_{\mu\nu} \tag{404}$$

最後の式は，anti-de Sitter algebra の特徴的なものである。[26] $R \to \infty$ の極限で，Poincare algebra が回復。

この古典解は rigid な SUSY を保っている。

gravitino の超対称変換は，brane 上の反対称テンソル場の強さによって，半分破れる。

16 個の rigid susy と 16 個の superconformal SUSY に対応。[27]

supergroup

$$\begin{pmatrix} SO(p+1,2) & SUSY \\ SUSY & SO(D-p-1) \end{pmatrix} \tag{405}$$

$SU(2,2|4)$ or $OSp(8|4)$ は subgroup として含まれ，これは $\mathcal{N}=4$ gauge theory の superconformal symmetry となる。

ゲージ固定の後，$(p+1)$ 次元の SUSY の多重項

$(p+2)$ 次元の AdS isometry は $(p+1)$ 次元の conformal symmetry

（両方とも群は $SO(p+1)$，超対称な拡張でも同じ）

同様に相対論的 superconformal mechanics は $d=4$，$\mathcal{N}=2$ の black hole $(p=0)$ solution から導かれる。（ブラックホールは非相対論的，質量 $\to \infty$）[28]

## 10.5 Black holes and (super)conformal mechanics

extreme RN metric:

$$ds^2 = -\left(1+\frac{M}{\rho}\right)^{-2} dt^2 + \left(1+\frac{M}{\rho}\right)^2 \left[d\rho^2 + \rho^2 d\Omega^2\right] \tag{406}$$

near-horizon geomrtry:

$$ds^2 = -\left(\frac{\rho}{M}\right)^2 dt^2 + \left(\frac{M}{\rho}\right)^2 d\rho^2 + M^2 d\Omega^2 \tag{407}$$

$$\phi = \frac{M}{\rho} \tag{408}$$

[26] この右辺の符号を変えると，de Sitter algebra。

[27] $32 = 2^{10/2}$

[28] 4D extreme RN black hole の near-horizon geometry は $AdS_2 \times S^2$。$S^2 = SO(3)/SO(2)$，$SO(3) \approx SU(2)$ $\to \mathcal{N}=2$。

とすると

$$ds^2 = -\phi^2 dt^2 + \frac{M^2}{\phi^2} d\phi^2 + M^2 d\Omega^2 \tag{409}$$

$$A = \phi\ dt \tag{410}$$

さらに

$$\phi = \left(\frac{2M}{r}\right)^2 \tag{411}$$

とすると

$$ds^2 = -\left(\frac{2M}{r}\right)^4 dt^2 + \left(\frac{2M}{r}\right)^2 dr^2 + M^2 d\Omega^2 \tag{412}$$

質量 $m$，電荷 $q$ の粒子を考える。
この background では粒子のハミルトニアンは[29]

$$H = \left(\frac{2M}{r}\right)^2 \left[\sqrt{m^2 + (r^2 p_r^2 + 4L^2)/4M^2} - q\right] \tag{413}$$

ここで $L^2 = p_\theta^2 + \sin^{-2}\theta p_\varphi^2$。

ハミルトニアンは次の形に書き直せる：

$$H = \frac{p_r^2}{2f} + \frac{mg}{2r^2 f} \tag{414}$$

ここで

$$f = \frac{1}{2}\left[\sqrt{m^2 + (r^2 p_r^2 + 4L^2)/4M^2} - q\right] \tag{415}$$

$$g = 4M^2(m^2 - q^2)/m + 4L^2/m \tag{416}$$

conformal group の生成子を次のようにとれる。

$$H = \frac{p_r^2}{2f} + \frac{mg}{2r^2 f}, \quad K = \frac{1}{2} f r^2, \quad D = \frac{1}{2}(r p_r + p_r r) \tag{417}$$

さらに，

$$M \to \infty, \quad m - q \to 0, \quad M^2(m-q) = fixed \tag{418}$$

という極限で

$$f \to m, \quad H = \frac{p_r^2}{2m} + \frac{g}{2r^2}, \quad g = 8M^2(m-q) + 4\ell(\ell+1)/m \tag{419}$$

[29] $H = -p_0$，$(p - qA)^2 + M^2 = 0$，$I = -\int [m\sqrt{-g} - qA]$

exercise

$$[D,H]=2iH,\quad [D,K]=-2iK,\quad [H,K]=-iD \tag{420}$$

となることを示せ。

exercise

$$L_0=\frac{1}{2}(H+K),\quad L_{\pm1}=\frac{1}{2}(H-K\mp iD) \tag{421}$$

とするとき，Virasoro 代数

$$[L_1,L_{-1}]=2L_0,\quad [L_0,L_{\pm1}]=\mp L_{\pm1} \tag{422}$$

を満たすことを確かめよ。

## 10.6 場の理論と弦理論の関係

### 10.6.1 Maldacena's conjecture

Maldacena's conjecture （推測）

「IIB in $AdS\times S^5$ は，$\mathcal{N}=4$ の 4 次元 $SU(N)$ super Yang-Mills theory と dual な関係にある。」

10 次元弦理論における D3 brane は 4 次元の $\mathcal{N}=4$ super Yang-Mills theory に結びつく。
$\mathcal{N}=4$ super Yang-Mills theory は，$\beta$ function がゼロ（superconformal symmetry）

- 代数的対応

  $(p+2)$ 次元の AdS の境界は $(p+1)$ 次元の表面，そこでは AdS isometry は conformal 変換としてはたらく。

- 力学的対応

  gauge 理論の相関関数＝弦理論の Green 関数

$$\langle e^{\int d^4x A_i\mathcal{O}_i}\rangle = Z\left[\tilde{A}_i\right] \tag{423}$$

$\mathcal{O}_i$： gauge 理論の (chiral primary) operator, $\tilde{A}_i$： 10 次元時空内の超重力理論の場, $A_i$： その境界での値。

特に $N \to \infty$，$g_{YM}^2 N = fixed\ and\ large$ の極限で Wilson loop は

$$W_{YM}[A_i] = S_{cl.\ SUGRA}\left(\tilde{A}_i\right) \tag{424}$$

AdS における古典的散乱は境界の状態のみに依存。

conformal (quantum) correlaters

Holographic principle

### 10.6.2 Holographic principle

ゲージ理論は量子重力のある断面に現れる？
基本的な自由度は，境界にある。
ブラックホールの場合：エントロピーは表面積に依存，体積によらない。
応用：$SU(N)$ gauge theories のあるパラメータ領域 $(N, g_{YM}, \theta)$ では，string theory から導かれる。

## 10.7 応用例

### 10.7.1 $q$-$\bar{q}$ ポテンシャル

near-horizon metric:

$$ds^2 = \left[\frac{r^2}{r_0^2}(ds^2)_4 + \frac{r_0^2}{r^2}dr^2\right] + r_0^2 d\Omega_5^2 \tag{425}$$

この領域での string の (Nambu-Goto) action: [30]

$$S = T\int\sqrt{g_{tt}}dt\sqrt{g_{rr}dr^2 + g_{xx}dx^2} = T\int dt\sqrt{dr^2 + \frac{r^4}{r_0^4}dx^2} \tag{426}$$

ここで，$T = (2\pi\alpha')^{-1}$ は string tension。

おなじく，string のエネルギーは

$$E = Tr_0^2\int\sqrt{\frac{dr^2}{r_0^4} + \frac{r^4}{r_0^8}dx^2} = Tr_0^2\int\sqrt{\left(\frac{dU}{dx}\right)^2 + U^4}dx \tag{427}$$

[30] ここでは，string の古典的エネルギーを見る。Polyakov action でももちろん同一の結果を得る。

ここで，$U=r/r_0^2$。$E(=S)$ を最小とする $U$ は？$x$ をあらわに含まないので，次の量は保存量。

$$U'\frac{dE}{dU'}-E\propto\frac{U^4}{\sqrt{U'^2+U^4}}=U_{min}^2 \tag{428}$$

したがって，$U$ の方程式は

$$U'^2=U^4\left(\frac{U^4}{U_{min}^4}-1\right) \tag{429}$$

これを用いて $E$ を書き換えると，

$$\begin{aligned} E &= 2Tr_0^2\int_{U_{min}}^{\infty}\frac{dU}{\sqrt{1-(U_{min}/U)^4}} \\ &= 2Tr_0^2U_{min}\int_1^{\infty}\frac{dt}{\sqrt{1-1/t^4}} \end{aligned} \tag{430}$$

$q$ と $\bar{q}$ の間の string のエネルギーを求めるには，これから $q$ と $\bar{q}$ の brane から離れて無限にのびていく部分の寄与を差し引かねばならない。

単独の $q$ の寄与は

$$E_0=Tr_0^2\int_0^{\infty}dU=Tr_0^2U_{min}\int_0^{\infty}dt \tag{431}$$

したがって $q$-$\bar{q}$ ポテンシャルエネルギーは

$$\begin{aligned} V &= E-2E_0 \\ &= 2Tr_0^2U_{min}\left[\int_1^{\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{1-1/t^4}}-1\right)dt-1\right] \\ &= -2Tr_0^2U_{min}\frac{\sqrt{2}\pi^{3/2}}{\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)^2} \end{aligned} \tag{432}$$

$q$ と $\bar{q}$ の間の string の長さは

$$\begin{aligned} L &= 2\int_{U_{min}}^{\infty}\frac{dx}{dU}dU \\ &= 2\int_{U_{min}}^{\infty}\frac{dU}{U^2\sqrt{(U/U_{min})^4-1}} \\ &= \frac{2}{U_{min}}\int_1^{\infty}\frac{dt}{t^2\sqrt{t^4-1}} \\ &= \frac{2}{U_{min}}\frac{\sqrt{2}\pi^{3/2}}{\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)^2} \end{aligned} \tag{433}$$

これから，
$$V \propto -\frac{Tr_0^2}{L} \tag{434}$$
がわかる。[31]
$T \sim \ell_s^{-2}$，$r_0^2 \sim \sqrt{g_s N}\ell_s^2 \sim g_{YM}\sqrt{N}\ell_s^2$ であるから，
$V$ は $g_{YM}$ に比例。（非摂動効果？）

<u>exercise</u>　ここにでてきた，いくつかの積分の数値を確かめよ。

#### 10.7.2　有限温度系

near-extremal D3-brane を考える。
string-frame metric:
$$ds^2 = f_+^{-1/2}\left(f_0^{-1/2}d\tau'^2 + f_0^{1/2}\sum_{i=1}^{3}(dx^i)^2\right) + f_+^{1/2}\left(f_0^{-1}dr^2 + r^2 d\Omega_5^2\right) \tag{435}$$
$$f_+ = 1 + \frac{r_+^4}{r^4}, \quad f_0 = 1 + \frac{r_+^4 - r_-^4}{r^4} = 1 + \frac{\epsilon^4}{r^4} \tag{436}$$
$r_+ = r_-$ のときは，前の extreme 解に一致する。

Newton 近似でエネルギー密度と圧力を求める [144] と
$$r_+^4 = \frac{2\kappa^2}{4c_5}\frac{3\mathcal{E}+\mathcal{P}}{4}, \quad r_-^4 = \frac{2\kappa^2}{4c_5}\frac{-\mathcal{E}+5\mathcal{P}}{4} \tag{437}$$
ここで $c_5 = \pi^3$ は半径 1 の $S^5$ の面積。
したがって
$$\mathcal{E} = \frac{4c_5}{2\kappa^2}r_0^4 + \frac{3c_5}{2\kappa^2}\epsilon^4 \tag{438}$$
ここで $r_0 = \sqrt{r_+ r_-}$。
右辺第一項を定数とみなすと，
$$\mathcal{E}' = \frac{3c_5}{2\kappa^2}\epsilon^4 \tag{439}$$
が物理的なエネルギー密度。

(435) は $r = 0$ の付近では
$$ds^2 = \frac{r^4}{r_+^2\epsilon^2}d\tau'^2 + \frac{\epsilon^2}{r_+^2}\sum_{i=1}^{3}(dx^i)^2 + \frac{r_+^2 r^2}{\epsilon^4}dr^2 + r_+^2 d\Omega_5^2 \tag{440}$$

[31] $\mathcal{N} = 4$ SYM は Coulomb phase のみをもつ。

$$R \equiv \frac{r_+ r^2}{2\epsilon^2} \tag{441}$$

とすると

$$\frac{r^4}{r_+^2 \epsilon^2} d\tau'^2 + \frac{r_+^2 r^2}{\epsilon^4} dr^2 = R^2 \left( \frac{2\epsilon}{r_+^2} d\tau \right)^2 + dR^2 \tag{442}$$

$R = 0$ が regular であるためには，$\tau'$ の周期 $\beta$ が次を満たせばよい。

$$\frac{2\epsilon}{r_+^2} \beta = 2\pi \tag{443}$$

これを用いると，エネルギー密度は

$$\mathcal{E}' = \frac{3c_5}{2\kappa^2}\epsilon^4 = \frac{3\pi^3}{2\kappa^2}\epsilon^4 = \frac{3\pi^3}{2\kappa^2}\frac{\pi^4 r_+^8}{\beta^4} = \frac{3\pi^2 N^2}{8\beta^4} \tag{444}$$

弱結合の $\mathcal{N} = 4$ YM で計算すると，[32]

$$\mathcal{E}' = 8N^2 \left( 1 + \frac{7}{8} \right) \frac{\pi^2}{30\beta^4} = \frac{\pi^2 N^2}{2\beta^4} \tag{445}$$

となり，定性的には一致。

ここで示したことは，Hawking 輻射を，YM ゲージ理論に結びつけたことになる！

3/4 の違い $\cdots$ 結合定数の領域は違う！

・重力の background からの計算 $\cdots$ $g_s N >> 1$ のとき正当

・SYM からの計算 $\cdots$ $g_s N << 1$ のとき正当

### 10.7.3 glue ball mass

glue ball に関連した演算子 $F^2 \equiv F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$ の相関は

$$\langle F^2(x) F^2(y) \rangle \sim \frac{N^2}{(x-y)^8} \tag{446}$$

これは質量の次元を持つパラメータのない時。

[32] $8 = 2 + 6$，2 は gauge 場の自由度，6 は scalar 場の自由度。同数の fermion 自由度がある。

$F^2$ はディラトン $\phi$ と結合しているから，ディラトンの fluctuation が $F^2$ の source となっている。

$$\begin{aligned} S &= -\frac{1}{4}\frac{1}{4\pi e^{\phi}}F_{\mu\nu}^2 + \cdots \\ &= -\frac{1}{4}\frac{1}{g_{YM}^2}F_{\mu\nu}^2 + \delta\phi F_{\mu\nu}^2 + \cdots \end{aligned} \tag{447}$$

このため，ディラトンを（ある意味）glue ball の波動関数と見て良い。

$\mathcal{N}=4$ SYM は Coulomb phase のみをもつ。
とじこめのために，SUSY を破る必要。
このため，有限温度を考える。
（４次元理論の高温極限として，３次元理論を考える。）

(435) で $r_+ >> r$ とすると

$$ds^2 = \frac{r^2}{r_+^2}\left(f_0^{-1/2}d\tau'^2 + f_0^{1/2}\sum_{i=1}^{3}(dx^i)^2\right) + \frac{r_+^2}{r^2}f_0^{-1}dr^2 + r_+^2 d\Omega_5^2 \tag{448}$$

$$\tau = \frac{\epsilon}{r_+^2}\tau', \quad u_i = \frac{\epsilon}{r_+^2}x_i, \quad \rho^4 - 1 = \left(\frac{r}{\epsilon}\right)^4 \tag{449}$$

とおくと

$$\frac{ds^2}{r_+^2} = \left(\rho^2 - \frac{1}{\rho^2}\right)d\tau^2 + \rho^2\sum_{i=1}^{3}(dx^i)^2 + \left(\rho^2 - \frac{1}{\rho^2}\right)^{-1}d\rho^2 + d\Omega_5^2 \tag{450}$$

（$\tau$ の周期は $\pi$）

これは５次元 AdS ブラックホール解（と $S^5$ の直積）のホライズン半径の大きい極限に一致。

この metric からつくる laplacian は

$$\frac{1}{\rho^3}\partial_\rho\rho^3\left(\rho^2 - \frac{1}{\rho^2}\right)\partial_\rho + \frac{1}{\rho^2}\partial_u^2 \tag{451}$$

波動方程式は

$$\left[\frac{1}{\rho}\partial_\rho\left(\rho^5 - \rho\right)\partial_\rho - \mu^2\right]\phi = 0 \tag{452}$$

$\mu^2$ は $-\partial_u^2$ の固有値。
規格化可能条件から，$\mu^2$ が求められる。

質量と $\mu$ の関係は

$$M = \frac{\pi}{\beta}\mu \tag{453}$$

正しい glue ball の質量比を与える？

そのほか，バリオンについて AdS/CFT からの知見がある。

# 11 その他

まともな見通しは，誰かの review を見て下さい。

- type 0 string と duality
- Non BPS D-branes (A. Sen)
- M-theory の brane と gauge 理論の関係
- M-cosmology, phenomenology?
- non commutative gauge theory

# 12 Appendix

## 12.1 曲率

Riemann tensor:

$$R^{\mu}{}_{\sigma\beta\alpha} = \partial_\beta \Gamma^{\mu}_{\sigma\alpha} - \partial_\alpha \Gamma^{\mu}_{\sigma\beta} + \Gamma^{\mu}_{\rho\beta}\Gamma^{\rho}_{\sigma\alpha} - \Gamma^{\mu}_{\rho\alpha}\Gamma^{\rho}_{\sigma\beta} \tag{454}$$

Ricci tensor:

$$R_{\sigma\alpha} = R^{\mu}{}_{\sigma\mu\alpha} = \partial_\mu \Gamma^{\mu}_{\sigma\alpha} - \partial_\alpha \Gamma^{\mu}_{\sigma\mu} + \Gamma^{\mu}_{\rho\mu}\Gamma^{\rho}_{\sigma\alpha} - \Gamma^{\mu}_{\rho\alpha}\Gamma^{\rho}_{\sigma\mu} \tag{455}$$

## 12.2 $p$-brane 解

metric:

$$ds^2 = H^{\alpha} dx_{\mu}^2 + H^{\beta} dx_i^2 \tag{456}$$

$$\mu = 0, 1, \cdots, p, \qquad i = p+1, \cdots, D-1 \tag{457}$$

$$H = H(x_i) \tag{458}$$

$$\Gamma^{\mu}_{\nu i} \;=\; \frac{1}{2}\alpha \frac{\partial_i H}{H}\delta^{\mu}_{\nu} \tag{459}$$

$$\Gamma^i_{\mu\nu} = -\frac{1}{2}\alpha H^{\alpha-\beta}\frac{\partial_i H}{H}\eta_{\mu\nu} \tag{460}$$

$$\Gamma^i_{jk} = \frac{1}{2}\beta\left(\frac{\partial_j H}{H}\delta^i_k + \frac{\partial_k H}{H}\delta^i_j - \frac{\partial_i H}{H}\delta_{jk}\right) \tag{461}$$

$$\Gamma^M_{\mu M} = 0 \tag{462}$$

$$\begin{aligned}
\Gamma^M_{iM} &= \Gamma^\mu_{i\mu} + \Gamma^k_{ik} \\
&= \frac{1}{2}\left[(p+1)\alpha + (D-p-1)\beta\right]\frac{\partial_i H}{H}
\end{aligned} \tag{463}$$

$$\begin{aligned}
R_{\mu\nu} &= \partial_i\Gamma^i_{\mu\nu} + \Gamma^M_{iM}\Gamma^i_{\mu\nu} - 2\Gamma^i_{\mu\lambda}\Gamma^\lambda_{i\nu} \\
&= -\frac{1}{2}\alpha H^{\alpha-\beta}\partial_i\left(\frac{\partial_i H}{H}\right)\eta_{\mu\nu} \\
&\quad -\frac{1}{4}\alpha\left[(p+1)\alpha + (D-p-3)\beta\right]H^{\alpha-\beta}\left(\frac{\partial_i H}{H}\right)^2\eta_{\mu\nu}
\end{aligned} \tag{464}$$

$$\begin{aligned}
R_{ij} &= \partial_k\Gamma^k_{ij} - \partial_i\Gamma^M_{jM} + \Gamma^M_{kM}\Gamma^k_{ij} - \Gamma^\mu_{i\nu}\Gamma^\nu_{j\mu} - \Gamma^k_{i\ell}\Gamma^\ell_{jk} \\
&= -\frac{1}{2}\left[(p+1)\alpha + (D-p-3)\beta\right]\partial_i\left(\frac{\partial_j H}{H}\right) - \frac{1}{2}\beta\partial_k\left(\frac{\partial_k H}{H}\right)\delta_{ij} \\
&\quad +\frac{1}{4}\left[2(p+1)\alpha\beta + (D-p-3)\beta^2 - (p+1)\alpha^2\right]\frac{\partial_i H}{H}\frac{\partial_j H}{H} \\
&\quad -\frac{1}{4}\beta\left[(p+1)\alpha + (D-p-3)\beta\right]\left(\frac{\partial_k H}{H}\right)^2\delta_{ij}
\end{aligned} \tag{465}$$

$$R_{\mu i} = 0 \tag{466}$$

Einstein frame で式を立てる。
このときは,

$$\alpha = -\frac{2}{p+1}A, \qquad \beta = \frac{2w}{p+1}A = \frac{2}{D-p-3}A \tag{467}$$

ととると，Ricci 曲率は簡単になって[33]

$$R_{\mu\nu} = \frac{A}{p+1}H^{\alpha-\beta}\partial_i\left(\frac{\partial_i H}{H}\right)\eta_{\mu\nu} \tag{468}$$

[33] このとき，$\sqrt{-g} = H^\beta$

$$R_{ij} = -\frac{A}{D-p-3}\partial_k\left(\frac{\partial_k H}{H}\right)\delta_{ij} - \frac{(D-2)A^2}{(p+1)(D-p-3)}\frac{\partial_i H}{H}\frac{\partial_j H}{H} \tag{469}$$

Einstein frame action:

$$S = \int d^D x\sqrt{-g}\left[R - \frac{4}{D-2}(\nabla\phi)^2 - ke^{b\phi}F^2_{(p+2)}\right] \tag{470}$$

field equations:

$$\frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\delta S}{\delta g^{MN}} = R_{MN} - \frac{1}{2}Rg_{MN} - \frac{4}{D-2}\left[\nabla_M\phi\nabla_N\phi - \frac{1}{2}(\nabla\phi)^2 g_{MN}\right] - ke^{b\phi}\left[(p+2)F^2_{MN} - \frac{1}{2}F^2 g_{MN}\right] = 0 \tag{471}$$

$$\frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\delta S}{\delta\phi} = \frac{8}{D-2}\nabla^2\phi - bke^{b\phi}F^2 = 0 \tag{472}$$

$$\frac{1}{\sqrt{-g}}\partial_M\left(\sqrt{-g}e^{b\phi}F^{MN\cdots}\right) = 0 \tag{473}$$

(471) より

$$R_{MN} = \frac{4}{D-2}\nabla_M\phi\nabla_N\phi + ke^{b\phi}\left[(p+2)F^2_{MN} - \frac{p+1}{D-2}F^2 g_{MN}\right] \tag{474}$$

$$e^{2\phi} = H^{\gamma} \tag{475}$$

$$F_{0\cdots pi} = \delta\ \partial_i H^{-1} \tag{476}$$

とすると,

$$\nabla_i\phi\nabla_j\phi = \frac{1}{4}\gamma^2\frac{\partial_i H}{H}\frac{\partial_j H}{H} \tag{477}$$

$$\nabla^2\phi = \frac{\gamma}{2}H^{-\beta}\partial_i\left(\frac{\partial_i H}{H}\right) \tag{478}$$

$$
\begin{aligned}
F_{\mu\nu}^2 &= -\delta^2(p+1)!H^{-p\alpha-\beta}\left(\partial_i H^{-1}\right)^2\eta_{\mu\nu} &(479)\\
F_{ij}^2 &= -\delta^2(p+1)!H^{-(p+1)\alpha}\partial_i H^{-1}\partial_j H^{-1} &(480)\\
F^2 &= -\delta^2(p+2)!H^{-(p+1)\alpha-\beta}\left(\partial_i H^{-1}\right)^2 &(481)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&(p+2)F_{\mu\nu}^2-\frac{p+1}{D-2}F^2 g_{\mu\nu}\\
&= -\delta^2(p+2)!\frac{D-p-3}{D-2}H^{-p\alpha-\beta}\left(\partial_i H^{-1}\right)^2\eta_{\mu\nu} &(482)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&(p+2)F_{ij}^2-\frac{p+1}{D-2}F^2 g_{ij}\\
&= -\delta^2(p+2)!H^{-(p+1)\alpha}\left[\partial_i H^{-1}\partial_j H^{-1}-\frac{p+1}{D-2}\left(\partial_i H^{-1}\right)^2\delta_{ij}\right] &(483)
\end{aligned}
$$

これらを用いると，次のように求まる。

$$\partial_i^2 H = 0 \tag{484}$$

$$A = \frac{16(p+1)(D-p-3)}{(D-2)^2b^2+16(p+1)(D-p-3)} \tag{485}$$

$$\gamma = \frac{4(D-2)^2 b}{(D-2)^2b^2+16(p+1)(D-p-3)} \tag{486}$$

$$\delta^2 = \frac{16(D-2)}{(D-2)^2b^2+16(p+1)(D-p-3)}\frac{1}{k(p+2)!} \tag{487}$$

### $b=0$ の場合

metric:

$$ds^2 = H^{-\frac{2}{p+1}}dx_\mu^2 + H^{\frac{2w}{p+1}}dx_i^2 \tag{488}$$

- M2-brane ($D=11,\ p=2$)

$$ds^2 = H^{-\frac{2}{3}}dx_{(3)}^2 + H^{\frac{1}{3}}dx_{(8)}^2 \tag{489}$$

- M5-brane ($D=11,\ p=5$)

$$ds^2 = H^{-\frac{1}{3}}dx_{(6)}^2 + H^{\frac{2}{3}}dx_{(5)}^2 \tag{490}$$

$D = 10$ **の場合**

$$A = \frac{(p+1)(7-p)}{4b^2 + (p+1)(7-p)} \tag{491}$$

$$\gamma = \frac{16b}{4b^2 + (p+1)(7-p)} \tag{492}$$

$$\delta^2 = \frac{8}{4b^2 + (p+1)(7-p)} \frac{1}{k(p+2)!} \tag{493}$$

string frame に移ると,

$$\begin{aligned} ds_S^2 &= e^{\frac{4}{D-2}\phi} ds_E^2 \\ &= e^{\frac{1}{2}\phi} ds_E^2 \\ &= H^{\frac{1}{4}\gamma} ds_E^2 \end{aligned} \tag{494}$$

$b = a - \frac{p-3}{2}$ とおくと元の action は string frame action:

$$S = \int d^{10}x\sqrt{-g}\left[e^{-2\phi}\left(R + 4(\nabla\phi)^2\right) - ke^{a\phi}F_{(p+2)}^2\right] \tag{495}$$

になる。

string-frame metric:

$$ds_S^2 = H^{-\frac{2-a}{a^2-(p-3)a+4}} dx_\mu^2 + H^{\frac{2+a}{a^2-(p-3)a+4}} dx_i^2 \tag{496}$$

$$e^{2\phi} = H^{\frac{4a-2(p-3)}{a^2-(p-3)a+4}} \tag{497}$$

$$F_{0\cdots pi} = \sqrt{\frac{2}{a^2-(p-3)a+4} \frac{1}{k(p+2)!}} \partial_i H^{-1} \tag{498}$$

- fundamental string $(p = 1,\ a = -2)$

$$ds_S^2 = H^{-1} dx_{(2)}^2 + dx_{(8)}^2 \tag{499}$$

$$e^{2\phi} = H^{-1} \tag{500}$$

$$F_{01i} = \sqrt{\frac{1}{2k(p+2)!}} \partial_i H^{-1} \tag{501}$$

- 5-brane ($p=5,\ a=2$)

$$ds_S^2 = dx_{(6)}^2 + Hdx_{(4)}^2 \tag{502}$$

$$e^{2\phi} = H \tag{503}$$

$$F_{012345i} = \sqrt{\frac{1}{2k(p+2)!}}\partial_i H^{-1} \tag{504}$$

- D$p$-brane ($a=0$)

$$ds_S^2 = H^{-1/2}dx_{(p+1)}^2 + H^{1/2}dx_{(9-p)}^2 \tag{505}$$

$$e^{2\phi} = H^{\frac{3-p}{2}} \tag{506}$$

$$F_{0\cdots pi} = \sqrt{\frac{1}{2k(p+2)!}}\partial_i H^{-1} \tag{507}$$

## 12.3 string frame と Einstein frame

string frame action:

$$S = \int d^D x\sqrt{-g}\left[e^{-2\phi}\left(R + 4(\nabla\phi)^2\right) - ke^{a\phi}F_{(p+2)}^2\right] \tag{508}$$

ここで

$$g_{\mu\nu} \to e^{\frac{4}{D-2}\phi}g_{\mu\nu} \tag{509}$$

とすれば,
Einstein frame action:

$$S = \int d^D x\sqrt{-g}\left[R - \frac{4}{D-2}(\nabla\phi)^2 - ke^{\left(a+2-\frac{4(p+1)}{D-2}\right)\phi}F_{(p+2)}^2\right] \tag{510}$$

を得る。

$$ds_S^2 = e^{\frac{4}{D-2}\phi}ds_E^2 \tag{511}$$

## 12.4 string-frame action

$$S = \int d^D x \sqrt{-g} \left[ e^{-2\phi} \left( R + 4(\nabla\phi)^2 \right) - k e^{a\phi} F^2_{(p+2)} \right] \tag{512}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\delta S}{\delta g^{MN}} &= e^{-2\phi} \left( R_{MN} - \frac{1}{2} R g_{MN} \right) \\ &\quad + e^{-2\phi} \left\{ 2\nabla_M \nabla_N \phi + 2 \left[ (\nabla\phi)^2 - \nabla^2\phi \right] g_{MN} \right\} \\ &\quad - k e^{a\phi} \left[ (p+2) F^2_{MN} - \frac{1}{2} F^2 g_{MN} \right] \end{aligned} \tag{513}$$

$$\frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\delta S}{\delta \phi} = e^{-2\phi} \left[ -8\nabla^2\phi + 8(\nabla\phi)^2 - 2R \right] - ak e^{a\phi} F^2 \tag{514}$$

## 12.5 楕円テータ関数

$$\vartheta_2 = 2q^{\frac{1}{4}} \prod_{n=1}^{\infty} (1-q^{2n})(1+q^{2n})^2 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} q^{\left(n+\frac{1}{2}\right)^2} \tag{515}$$

$$\vartheta_3 = \prod_{n=1}^{\infty} (1-q^{2n})(1+q^{2n-1})^2 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} q^{n^2} \tag{516}$$

$$\vartheta_4 = \prod_{n=1}^{\infty} (1-q^{2n})(1-q^{2n-1})^2 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n q^{n^2} \tag{517}$$

ただしここで

$$q = e^{\pi i \tau} \tag{518}$$

$$\vartheta_2\left(-\frac{1}{\tau}\right) = \sqrt{-i\tau}\,\vartheta_4(\tau) \tag{519}$$

$$\vartheta_3\left(-\frac{1}{\tau}\right) = \sqrt{-i\tau}\,\vartheta_3(\tau) \tag{520}$$

$$\vartheta_4\left(-\frac{1}{\tau}\right) = \sqrt{-i\tau}\,\vartheta_2(\tau) \tag{521}$$

$$\eta(\tau) = q^{\frac{1}{12}} \prod_{n=1}^{\infty} (1-q^{2n}) \tag{522}$$

$$\eta\left(-\frac{1}{\tau}\right) = \sqrt{-i\tau}\,\eta(\tau) \tag{523}$$

## 12.6 超対称性のおもちゃ

$$\left[a, a^\dagger\right] = 1 = \left\{b, b^\dagger\right\}, \quad b^2 = 0 \tag{524}$$

$$Q = a^\dagger b, \quad Q^\dagger = b^\dagger a \tag{525}$$

$$\left\{Q, Q^\dagger\right\} = H = a^\dagger a + b^\dagger b \tag{526}$$

$$Q^2 = Q^{\dagger 2} = 0 = [Q, H] \tag{527}$$

exercise

$$[Q, a], \quad [Q, b] \tag{528}$$

などを求めよ。

exercise

２次元調和振動子，３次元調和振動子，··· で同様な超対称モデルをつくると，何か楽しいことがあるか。

つまり新たに造れる演算子間の交換関係等は？

## 12.7 soliton solutions in $1+1$ dimensions

Lagrangian:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2}\left(\partial_\mu \phi\right)^2 - V(\phi) \tag{529}$$

examples:

$$V(\phi) = \begin{cases} \frac{m^4}{8\lambda}\left[\left(\frac{\sqrt{\lambda}}{m}\phi\right)^2 - 1\right]^2 & \phi^4 \ model \\ \frac{m^4}{\lambda}\left[1 - \cos\left(\frac{\sqrt{\lambda}}{m}\phi\right)\right] & SineGordon \ model \\ \frac{2m^4}{\lambda}\mathrm{sn}^2\left(\frac{\sqrt{\lambda}}{2m}\phi\middle|\,\nu\right) & Jacobi \ model \end{cases} \tag{530}$$

static soliton solutions $\phi_c$ satisfy

$$\phi_c(x)' = \pm\sqrt{2V(\phi_c(x))} \tag{531}$$

$m = \lambda = 1$ のとき

$$\phi_c(x) = \begin{cases} \tanh\left(\frac{x}{2}\right) & \phi^4 \ model \\ 4arctan\left(e^x\right) & SineGordon \ model \\ 2K(\nu) + 2\mathrm{sn}^{-1}\left(\tanh(x)\right) & Jacobi \ model \end{cases} \tag{532}$$

where

$$K_\nu = \int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{\sqrt{1-\nu\sin^2\theta}} \tag{533}$$

The classical mass of the soliton:

$$M_c = \int d\phi\sqrt{2V(\phi)} = \begin{cases} \frac{2}{3}\frac{m^3}{\lambda} & \phi^4 \ model \\ 8\frac{m^3}{\lambda} & SineGordon \ model \\ \frac{4}{\sqrt{\nu}}\ln\left(\frac{1+\sqrt{\nu}}{1-\sqrt{\nu}}\right)\frac{m^3}{\lambda} & Jacobi \ model \end{cases} \tag{534}$$

## 12.8 Bogomol'nyi equation for vortices

action: (or energy)

$$\int d^2\hat{x}\left[\frac{1}{4e^2}\hat{F}_{ij}\hat{F}_{ij} + (\hat{D}_i\hat{\phi})(\hat{D}_i\hat{\phi})^* + \hat{V}(|\hat{\phi}|)\right] \tag{535}$$

ここで $\hat{F}_{ij} = \hat{\partial}_i\hat{A}_j - \hat{\partial}_j\hat{A}_i$，$\hat{D}_i = \hat{\partial}_i + i\hat{A}_i$。
$\hat{V}$ は $|\hat{\phi}| = v$ のところに極小を持つ。

最初に，次のように rescale する。

$$\hat{\phi} = v\phi, \quad \hat{A}_i = evA_i, \quad \hat{x}^i = (ev)^{-1}x^i, \quad \hat{V} = e^2v^4V \tag{536}$$

このとき (535) は

$$v^2\int d^2x\left[\frac{1}{4}F_{ij}F_{ij} + (D_i\phi)(D_i\phi)^* + V(|\phi|)\right] \tag{537}$$

となる。
$V$ は $|\phi| = 1$ のところに極小を持つ。

次のように回転対称な ansatz をおく。

$$\phi = f(r)e^{in\theta}, \quad A_i = -\epsilon_{ij}\frac{x^j}{r^2}n[P(r)-1] \tag{538}$$

$n$ は整数。

境界条件は

$$P(0) = 1, \quad f(0) = 0, \quad P(\infty) = 0, \quad f(\infty) = 1 \tag{539}$$

場の方程式は

$$\frac{(rf')'}{r} = \frac{n^2 P^2 f}{r^2} + \frac{1}{2}\frac{\partial V}{\partial f} \tag{540}$$

$$\left(\frac{P'}{r}\right)' = \frac{2f^2 P}{r} \tag{541}$$

ここで $'$ は $r$ 微分。

この系では，一般に votex 解が存在するが，ここでは特に Bogomol'nyi equation を満たすモデルを考えよう。

$$V = \frac{1}{2}(f^2 - 1)^2 \tag{542}$$

とおく。

このとき，場の方程式は次の Bogomol'nyi equations と等価になる。

$$f' = \frac{nPf}{r} \tag{543}$$

$$\frac{nP'}{r} = f^2 - 1 \tag{544}$$

この方程式は実は

$$D_1\phi + iD_2\phi = 0 \tag{545}$$

$$B = \phi^2 - 1 \tag{546}$$

を表す。ここで $B$ は磁場 $(F_{12})$。

エネルギーは

$$\begin{aligned} & v^2 \int d^2x \left[\frac{1}{2}B^2 + |D_1\phi + iD_2\phi|^2 + \frac{1}{2}(\phi^2 - 1)^2\right] \\ = \; & v^2 \int d^2x \left[\frac{1}{2}\left(B^2 \mp (\phi^2 - 1)\right)^2 |D_1\phi \pm iD_2\phi|^2 \right. \\ & \left. \pm B(\phi^2 - 1) \mp 2\mathrm{Im} D_1\phi(D_2\phi)\right] \end{aligned} \tag{547}$$

この極小値は，Bogomol'nyi equation を満たすときで，

$$v^2 \int d^2x \frac{1}{r}\left[nP(f^2 - 1)\right]' = 2\pi n v^2 \tag{548}$$

# 参考文献


[1] String'98: http://www.itp.ucsb.edu/~strings98/

[2] String'99: http://strings99.aei-potsdam.mpg.de/

[3] T. W. Adawi, "Hairs of the Unicorn: Supersymmetry, Branes and Duality", Licentiate Thesis (Chalmers, 1999).

[4] E. Álvarez, J. Conde and L. Hernández, Rudiments of Holography, hep-th/0205075.

[5] H. Aoki *et al.*, hep-th/9908038. (IIB Matrix model)

[6] O. Aharony, S. S. Gubser, J. Maldacena, H. Ooguri and Y. Oz, Phys. Rep. **323** (2000) 183-386. hep-th/9905111. (Large $N$ and AdS/CFT)

[7] E. T. Akhmedov, hep-th/9911095. (Introduction to the AdS/CFT correspondence)

[8] Alejandro Arrizabalaga, "Orientifolds and Duality".

[9] C. Bachas, Branes from M-Theory, Meudon 00: Colloque de Cosmologie, http://darc.obspm.fr/~carter/Meudon/bachas/

[10] B. E. Baaquie and L. C. Kwek, hep-th/0002165. (Superstrings, Gauge Fields and Black Holes)

[11] T. Banks, hep-th/9911067. (M theory and Cosmology)

[12] T. Banks, hep-th/9911068. (Matrx theory)

[13] J. L. Barbon, http://eps2003.physik.rwth-aachen.de/data/talks/plenary/barbon.pdf, hep-th/0404188.

[14] X. Bekaert, hep-th/0209169. (Issues in electric-magnetic dualty (Thesis))

[15] M. K. Benna and I. R. Klebanov, arXiv:0803.1315.

[16] E. Bergshoeff, Branes and superalgebras, Quantum aspects of gauge theories, supersymmetry and unification, School in Leuven, January 18 -23, 1999.
http://tfdec1.fys.kuleuven.ac.be/~tmr/workshop99/bergshoe.ps

[17] E. Bergshoeff and A. Van Proeyen, Symmetries of string, M and F-theories, hep-th/0010195.

[18] D. S. Berman and E. Rabinovici, hep-th/0210044. (Supersymmetric gauge theories)

[19] M. Bertolini, hep-th/0303160.
(Four Lectures On The Gauge/Gravity Correspondence)

[20] A. Bilal, M(atrix) theory: a pedagogical introduction, Fortsch.Phys. 47 (1999) 5-28, hep-th/9710136.

[21] M. Blau, Supergravity Solitons, 1998 ICTP International School on String Theory.
http://www.ictp.trieste.it/~mblau

[22] M. Born and L. Infeld, Proc. Roy. Soc. (London), **A144** (1934) 425; **A147** (1934) 522; **A150** (1935) 141.

[23] H. Bosschi-Filho and N. R. F. Braga, hep-th/0312231. (AdS/CFT Correspondence and string/gauge duality)

[24] N. R. F. Braga, Braz. J. Phys. 32 (2002) 880-883, hep-th/0209189. (Quantum Fields in anti-de Sitter space and the Maldacena conjecture)

[25] C. Bachas and J. Troost, physics/0605105. (Superstring Theories)

[26] A. A. Chernitskii, hep-th/0509087. (Born-Infeld equations)

[27] Ulf Danielsson, Rep. Prog. Phys. **64** (2001) 51. (Introduction to string theory)

[28] S. R. Das and S. D. Mathur, gr-qc/0105063. (The Quantum Physics of Black Holes: results from string theory)

[29] J. R. David, hep-th/9911xxx. (String Theories and Black Holes)

[30] J. de Boer, http://www.desy.de/~susy02/pl.6/deboer.pdf

[31] J. de Boer, "String theory: an update", Nucl. Phys. B (Proc. Suppl.) 117 (2003) 353–372,hep-th/0210224.

[32] Martijn Derix and Jan Pieter van der Schaar, Stringy Black Holes, http://www-th.phys.rug.nl/~schaar/htmlreport/report.html

[33] D. H. Delphenich, "Nonlinear Electrodynamics and QED" arXiv 2003.

[34] M. de Roo, "Basic String Theory — The World Sheet" (1998)

[35] R. Dijkgraaf, Caputcollege string theory 2001.

[36] P. Di Vecchia, D BRANES IN STRING THEORIES, talk at Workshop on "Developments in Superstring and M-theory" http://hep4.c.u-tokyo.ac.jp/string/

[37] P. Di Vecchia and A. Liccard, D BRANES IN STRING THEORY, hep-th/9912161.

[38] P. Di Vecchia, An Introduction to AdS/CFT Correspondence, Fortschr. Phys. 48 (2000) 87.

[39] P. Di Vecchia, Gauge theories from Dp-branes, Nucl. Phys. B (Proc. Suppl.) 108 (2002) 12.

[40] P. Di Vecchia and A. Liccardo, Gauge theories from D branes, hep-th/0307104.

[41] M. J. Duff, TASI LECTURES ON BRANES, BLACK HOLES AND ANTI-DE SITTER SPACE, hep-th/9912164.

[42] J. Erdmenger, "String Theory at the MPI", 19 October 2005.

[43] J. M. Figueroa-O'Farrill, "Electromagnetic Duality for Children".

[44] S. Förste, hep-th/0110055. (Strings, Branes and Extra Dimensions)

[45] H. Garcia-Compean and O. Loaiza-Brito, hep-th/0003019. (Lectures on Strings, D-branes and Gauge Theories)

[46] H. Garcia-Compean and O. Loaiza-Brito, hep-th/0010046. (Topics on Strings, Branes and Calabi-Yau Compactifications)

[47] J. P. Gauntlett, QMW-PH-98-2, http://www.strings.ph.qmw.ac.uk/WhatIs/jerome.ps (M-theory: Strings, Duality and Branes)

[48] U. Gran, http://fy.chalmers.se/˜gran/

[49] M. B. Green, Class. Quantum Grav. **16** (1999) A77-A100. (Superstring, M theory and quantum gravity)

[50] D. Gross, http://online.itp.ucsb.edu/online/mt01teach/gross/

[51] M. Haack, B. Körs and D. Lüst, Recent Developments in String Theory: From Perturbative Dualities to M-Theory, hep-th/9904033.

[52] F. Hacquebord, hep-th/9909227. (Matrix String Theory, etc.)

[53] R. S. Halbersm, Geometry of Strings and Branes (Thesis 2002, Groningen)

[54] E. Imeroni, hep-th/0312070. (The Gauge/String Correspondence)

[55] C. V. Johnson, hep-th/0007170. (D-Brane Primer)

[56] C. V. Johnson, Current Trends In String Theory, APS DPF Meting, 31st August 2004.

[57] M. Kaku, "Introduction to Superstring and M-Theory" (Springer)

[58] R. Kerner, A. L. Barbosa and D. V. Gal'tsov, "Topics in Born-Infeld Electrodynamics" (ArXive 0108xxx)

[59] S. V. Ketov, "Many Faces of Born-Infeld Theory" (ArXive hep-th/0108xxx)

[60] M. K.-H Kiessling, "Electromagnetic field theory without divergence problems I" (ArXive math-ph/0306076)

[61] E. Kiritsis, "Heterotic/Type II Duality and its Field Theory Avatars", 1998.

[62] E. Kiritsis, hep-ph/9911525. (SUSY and Duality in Field Theory and String Theory)

[63] E. Kiritsis, Onassia Lecture 2004.

[64] I. Kirsch, hep-th/0406274. (Generalizations of the AdS/CFT Correspondence)

[65] I. R. Klebanov, hep-th/0009139. (TASI Lectures: Inroduction to the AdS/CFT Correspondence)

[66] I. R. Klebanov, hep-ph/0509087. (QCD and String Theory (Lepton-Photon 2005))

[67] D. Klemm, hep-th/0410040. (Black holes and singularities in string theory)

[68] P. Koerber, Fortschr. Phys. 52 (2004) 871-960. (Abelian and non-abelian D-brane effective actions)

[69] S. Kovacs, hep-th/9908171. ($\mathcal{N} = 4$ SYM, etc.)

[70] Sangmin Lee, "STRING DUARITY", The 7th Summer Institute for Theoretical Physics 2007.

[71] Alberto Lerda, Recenti Sviluppi sulla Corrispondenza Gauge/Gravita, Cortona 2005.

[72] J. E. Lidsey, D. Wands and E. J. Copeland, hep-th/9909061. (Superstring Cosmology)

[73] J. Maharana, hep-th/9911xxx. 何か構成が似てるな。

[74] J. Maldacena, Nucl. Phys. B (Proc. Suppl.) **61A** (1998) 111-123. (Black holes and D-branes)

[75] J. Maldacena, Int. J. Theor. Phys. **38** (1999) 1113-1133. (The Large-N Limit of Supercomformal Field Theories and Supergravity)

[76] J. Maldacena, hep-ph/0002092, talk in Lepton-Photon 99.

[77] J. Maldacena, hep-th/0309246, "TASI lectures on AdS/CFT".

[78] J. Maldacena, Braz. J. Phys. 34 (2004) 151-156, “Strings in Flat Space and Plane Waves from $\mathcal{N} = 4$ Super Yang-Mills”.

[79] D. Marolf, String/M-branes for Relativists, gr-qc/9908045.

[80] D. Marolf, Resource Letter: The Nature and Status of String Theory, hep-th/0311044.

[81] A. Marshakov, String theory or field teory?, hep-th/0212114.

[82] D. Mateos, String theory a nd Quantum Chromodynamics, arXiv:0709.1523.

[83] J. A. Mignaco, Braz. J. Phys. 31 (2001) 235-246, “Electromagnetic Duality, Charges, Monopoles, Topology, ...”.

[84] T. Mohaupt, Black Holes in Supergravity and String Theory, hep-th/004098, Class. Quantum Grav. **17** 3429-3482 (2000).

[85] T. Mohaupt, Introduction to String Theory, hep-th/0207249.

[86] A. Miemiec and I. Schnakenburg, Basics of M-Theory, hep-th/0509137.

[87] S. Mukhi, Understanding Fields Using Strings: A Review for Particle Physicists, hep-ph/0002005.

[88] H. Nastase, Introduction to AdS-CFT, arXiv:0712.0689.

[89] Win Nuding, Maldacena Conjecture, January 28, 2004; Seminar Talk on the Maldacena Conjecture, January 28, 2004.

[90] C. A. Núñez, Introduction to D-branes (Caribbean School on String Theory, La Habana, 1998).

[91] N. Obers, Recent developments in the gauge/gravity correspondence, transparencies available from http://www.nbi.dk/~obers (2003).

[92] N. Ohta, Introduction to M-theory for relativists and cosmologists, Prog. Theor. Phys. Suppl. 148 (2002) 1. (gr-qc/0205036).

[93] K. Olsen, hep-th/9908199. (Duality)

[94] H. Ooguri, hep-lat/9911027. (An Introduction to the AdS/CFT Correspondence)

[95] ARI Pankiewicz and Stefan Theisen, “Introductory Lectures on String Theory and the AdS/CFT Correspondence”, AEI-2002-034.

[96] Jeong-Hyuch Park, hep-th/9910199. (Superconformal symmetry in three-dimensions)

[97] Robi Peschanski, “QCD, Strings and AdS/CFT, an Introduction” (School of QCD, Low-x Physics and Diffraction, Copanello, Italy, July 2007).

[98] Robi Peschanski, “Introduction to String Theory and Gauge/Gravity duality for students in QCD andQGP phenomenology” ArXiv:0804.3210.

[99] A. W. Peet, Class. Q. Grav. **15** (1998) 3291. (The Bekenshtein formula and string theory)

[100] A. W. Peet, TASI Lectures on Black Holes in String Theory, hep-th/0008241.

[101] M. J. Perry, “Electrodynamics”,
http://pdm23.trin.cam.ac.uk/˜pdm23/maths/

[102] J. L. Petersen,
Introduction to the Maldacena Conjecture on AdS/CFT.
NBI-HE-99-05, hep-th/.

[103] J. C. Plefka, hep-th/0307101. (Plane-Wave String/Gauge theory Duality)

[104] J. Plefka, “The Plane-Wave String/Gauge Theory Duality” (KITP QCD-String 9-14-04)

[105] J. Polchinski, hep-th/0209105. talk.

[106] Antoine Van Proyen, hep-th/9910030.

[107] Antoine Van Proyen and K. U. Leuven, “Duality between conformal gauge theories”
http://tfdec1.fys.kuleuven.ac.be/~toine/colloq/sld001.htm

[108] R. Rajaraman, “Solitons and Instantons” (North-Holland)

[109] K.-H. Rehrenn, “QFT Lectures on AdS-CFT” (presented at III Summer School in Modern Mathematical Physics, Zatibor, August 2004)

[110] K.-H. Rehrenn, “QFT Lectures on AdS-CFT” hep-th/0411086.

[111] N. Riazi, “Geometry and Topology of Solitons”, hep-th/0102152.

[112] L. H. Ryder, “Quantum Field Theory” (Cambridge)

[113] A. Sagnotti and A. Sevrin, hep-ex/0209011. (Strings, Gravity and Particle Physics)

[114] J. H. Schwarz, Phys. Rep. **315** (1999) 107-121.

[115] J. H. Schwarz, astro-ph/0304507.

[116] Volker Schomerus, ArXiv:0706.1209.

[117] Claudio. A. Scrucca, “Aspects of D-brane dynamics in superstring theory” (Ph. D. Thesis).

[118] A. Sen, hep-lat/0011073. (Recent Development in Superstring theory)

[119] A. Sevrin, “From strings to branes: A primer”, Moriond 2000.

[120] A. Sevrin, “Prospects from strings and branes”, hep-th/0407023.

[121] G. A. Silva, hep-th/0012267. (Born-Infeld action and Supersymmetry) in spanish.

[122] G. Siopsis, http://aesop.phys.utk.edu/strings/

[123] J. Soda, gr-qc/0108046. (Branes for Relativists)

[124] D. T. Son and A. O. Starinets, ArXiv:0704.0240.

[125] M. J. Strassler,
http://mocha.phys.washington.edu/~int_talk/
WorkShops/int_03_28W/People/Strassler_M/
(Introduction to the AdS CFT Correspondence)

[126] M. J. Strassler, hep-th/0309140.

[127] R. J. Szabo, hep-th/0207142. (BUSSTEPP Lectures on string theory)

[128] W. Taylor IV, hep-th/0002016. (The M(atrix) model of M-theory)

[129] W. Taylor, Rev. Mod. Phys. **73** (2001) 419. hep-th/0101126. (The M(atrix) theory).

[130] W. Taylor, "Lectures on D-branes, tachyon condensation, and string field theory", hep-th/0301094.

[131] J. Terning, hep-th/0204012. (Glueballs and AdS/CFT).

[132] G. 't Hooft, Introduction to string theory
(http://www.phys.uu.nl/~thooft/).

[133] L. Thorlacius, Nucl. Phys. B (Proc. Suppl.) **61A** (1998) 86-98. (Introduction to D-branes)

[134] I. V. Vancea, hep-th/0109xxx. (Introductory Lectures on D-Branes)

[135] P. VanHove, Au bout de la corde... la théorie M, `http://cern.ch/pvanhove/abstract-hd.html`

[136] J. F. Vázquez-Poritz, hep-th/0110084. (Branes and Brane Worlds in M-Theory)

[137] E. J. Weinberg, hep-th/9908095, hep-th/9908097.

[138] A. Wipf, "AdS/CFT-Correspondence", adscfthead.tex

[139] E. Witten, "Magic, Mystery, and Matrix", Notice of the AMS **45** No. 9 1124-1129.

[140] D. Youm, "Black holes and solitons in dtring theory", Phys. Rep. **316** No. 1,1-232 (1999).

[141] D. Young, arXiv:0706.3751.

[142] A. Zaffaroni, "Introduction to the AdS-CFT correspondence", Class. Quantum Grav. **17** 3571-3597 (2000).

[143] 石橋延幸　超弦理論の展望　数理科学 1999 4 月号　p. 12.

[144] 今村洋介　$AdS_5/CFT_4$　correspondence 素粒子論研究 98-6 (1999-3)　p. 209.

[145] 今村洋介　重力でゲージ理論を調べる　日本物理学会誌 2000 3 月号　p. 188.

[146] 江口徹　超対称性理論入門　「大学院素粒子物理 2」（講談社）　p. 285-.

[147] 江口徹　ゲージ理論と超弦理論の双対性　別冊数理科学　２０世紀の物理学　p. 234.

[148] 江口徹　String Duality　数学 50 vol. 3 (1998)　p. 293 (69).

[149] 江口徹　物理学に現われる双対性　数理科学 2000 2 月号　p. 5.

[150] 太田信義　デュアリティーとM理論　別冊数理科学 場の理論　p. 197.

[151] 風間洋一　超弦理論の新時代　科学 68 (May 1998)　p. 399.

[152] 風間洋一　M理論とは何か　日本物理学会誌 2001 4 月号　p. 242.

[153] 川合光　1999 年夏の学校講義録　「弦理論の構成的定義」

[154] 川合光　KEK 冬の学校 2005

[155] 川野輝彦　Dブレインとモノポール　数理科学 2000 2 月号　p. 20.

[156] 菅野浩明　ソリトンと素粒子の双対性　数理科学 2000 2 月号　p. 13.

[157] 国友浩　超弦理論における弱・強結合双対性　数学セミナー　p. 24.

[158] 国友浩　超ひも理論と量子重力　数理科学 1998 8 月号　p. 50.

[159] 国友浩　2000 年三者若手夏の学校講義録

[160] M. J. ダフ　超ひも理論からM理論へ　日経サイエンス 1998 ５月号　p. 44.

[161] 杉本茂樹　超弦理論の魅力　基研５０周年記念

[162] 中村英樹　超弦 (Superstring) 理論の遠景　理系への数学 2001 2 月号　p. 69.

[163] 夏梅誠　超弦理論はブラックホールの謎を解けるか？　日本物理学会誌 1999 3 月号　p. 178.

[164] 夏梅誠　ブラックホールの謎に迫りつつある超弦理論　パリティ 2000-07 (Vol. 15)　p. 14.

[165] 夏梅誠　有限温度AdS/CFT: why interesting?　KEK冬の学校2005

[166] 野尻伸一　review talk at JGRG '99.

[167] 深谷賢治　「数学者による数学者のための String Duality 概論」

[168] 福間将文　ランダム面上のくりこみ群と弦理論　物性研究79-3 (Dec 2002)　p. 548.

[169] 細道和夫　ブラックホールのエントロピー　別冊数理科学 場の理論　p. 182.

[170] 松尾泰　「String/Duality/CFT 入門」　1998三者若手夏の学校講義録

[171] 松尾泰　「ストリング」理論　最近の発展　数理科学 1998 2 月号　p. 23,　別冊数理科学 重力理論　p. 186.

[172] 松尾泰　双対性　数学セミナー 2002 11 月号　p. 47.

[173] 吉田健太郎　AdS/CFT 対応入門　KEK 冬の学校 2005

[174] 米谷民明　非摂動的弦理論の構築を目指して　日本物理学会誌 1998 5 月号　p. 312.

[175] K. L. Zarembo and Yu. M. Makeenko, 'An introduction to matrix superstring models', Uspekhi 168, No. 1 (1998) 3.

[176] S. G. Gukov, 'Introduction to string dualities', Uspekhi 168, No. 7 (1998) 705.

[177] E. T. Akhmedov, 'Correspondence between supersymmetric Yang-Mills and supergravity theories', Uspekhi 171, No. 9 (2001) 1005.

[178] A. V. Marshakov, 'String theory or field theory?', Uspekhi 172, No. 9 (2002) 978.