素粒子物理学特論

期末レポート問題

$\hbar = c = 1$ とする。

相互作用のない複素スカラー場のラグランジアンは

$$\mathcal{L} = \partial^\mu \Phi^\dagger \partial_\mu \Phi - m^2 \Phi^\dagger \Phi$$

である。

場 Φ を

$$\Phi(\mathbf{x}, t) = \int \frac{d^3\mathbf{k}}{\sqrt{(2\pi)^3(2\omega_\mathbf{k})}} \left[a(\mathbf{k}) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x} - i\omega_\mathbf{k} t} + b^\dagger(\mathbf{k}) e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x} + i\omega_\mathbf{k} t} \right]$$

のように展開する。ただしここで $\omega_\mathbf{k} = \sqrt{\mathbf{k}^2 + m^2}$ である。

ここで演算子 $a(\mathbf{k})$，$b(\mathbf{k})$ とそのエルミート共役は交換関係

$$[a(\mathbf{k}), a^\dagger(\mathbf{k}')] = \delta^3(\mathbf{k} - \mathbf{k}'), \quad [b(\mathbf{k}), b^\dagger(\mathbf{k}')] = \delta^3(\mathbf{k} - \mathbf{k}') \quad \text{(その他の交換子はゼロ)}$$

を満たすものとする。

1. 上記の交換関係から，$\Phi(\mathbf{x}, t)$ とその共役運動量 $\Pi(\mathbf{x}', t)$ の同時刻正準交換関係

   $$[\Phi(\mathbf{x}, t), \Pi(\mathbf{x}', t)] = i\delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{x}')$$

   を導出せよ。

2. この系のハミルトニアンを，演算子 $a(\mathbf{k})$，$b(\mathbf{k})$ とそのエルミート共役を用いて表せ。注：$H = \int d^3\mathbf{x}\, \mathcal{H}(\Phi, \Phi^\dagger, \Pi, \Pi^\dagger)$

3. ラグランジアンは，無限小変換 $\Phi \to \Phi + \delta\Phi$，$\delta\Phi = i\theta\Phi$ (θ は実パラメータ) の下で不変である。ネーターの定理により保存する電荷 (charge) を求め，それを演算子 $a(\mathbf{k})$，$b(\mathbf{k})$ とそのエルミート共役を用いて表せ。

以上