量子力学 I

期末試験

1. スピン状態を表す波動関数 $\chi(t)$ を

$$\chi(t) = \begin{pmatrix} \chi_+(t) \\ \chi_-(t) \end{pmatrix}$$

とする。また，スピン演算子を

$$S_1 = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad S_2 = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad S_3 = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

とする。以下本問では，ハミルトニアンが $-BS_1$ (B は定数) で表される場合を考える。すなわちシュレディンガー方程式は

$$i\hbar\frac{\partial\chi}{\partial t} = -BS_1\chi$$

である。さらに，初期条件として $\chi_+(0) = 1$，$\chi_-(0) = 0$ とする。すなわち

$$\chi(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

である。

(a) 時刻 $t = 0$ における $\langle S_1\rangle$，$\langle S_2\rangle$，$\langle S_3\rangle$ を求めよ。ただし，演算子 A について $\langle A\rangle \equiv \chi^\dagger A\chi$ とする (ここで $\dagger$ は転置かつ複素共役を表すものとする)。
(b) 時刻 $t \ \ (t > 0)$ における状態 $\chi(t)$ を求めよ。
(c) 時刻 $t \ \ (t > 0)$ における $\langle S_1\rangle$，$\langle S_2\rangle$，$\langle S_3\rangle$ を求めよ。

2. 問 1. を一般化し，ハミルトニアンが $-\mathbf{B}\cdot\mathbf{S} = -B_1S_1 - B_2S_2 - B_3S_3$ で表される場合を考える (ただし (B_1, B_2, B_3) は定数)。
一般のスピン状態について，$\mathbf{S} = (S_1, S_2, S_3)$ の期待値 $\langle\mathbf{S}\rangle = (\langle S_1\rangle, \langle S_2\rangle, \langle S_3\rangle)$ のみたす微分方程式を求めよ。

裏もあります

3. 角振動数 ω の一次元調和振動子のハミルトニアンは

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 x^2\,,$$

エネルギーレベルは $E_n = \hbar\omega\left(n+\frac{1}{2}\right)$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ で表される。

(a) $n = 0, 1$ に対応する規格化された波動関数 $\psi_0(x)$,$\psi_1(x)$ を求めよ。

(b) $t = 0$ で波動関数が

$$\psi(x, 0) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/4}\left[1 + \sqrt{\frac{2m\omega}{\hbar}}x\right]e^{-\frac{m\omega}{2\hbar}x^2}$$

で与えられているとき，$\psi(x, t)$　$(t > 0)$ を求めよ。

(c) 時刻 t　$(t > 0)$ における x の期待値 $\langle x\rangle_{\psi(x,t)}$ を求めよ。また，そのおおよその時間変化の振る舞いをグラフに表せ。

(d) 時刻 t　$(t > 0)$ におけるエネルギーの期待値を求めよ。

4. 問 3. と同じ角振動数 ω の一次元調和振動子を考える。
一般の状態について，x の期待値 $\langle x\rangle$ のみたす微分方程式を求め，その一般解を書け。

以上