素粒子物理学特論

期末テスト

以下のようなスカラー場のハミルトニアンを考える。(すべて時刻 $t=0$ で考えていることに注意せよ)

$$H = \int d^3\mathbf{x} \left[\frac{1}{2}\pi^2 + \frac{1}{2}(\nabla\phi)^2 + \frac{1}{2}m^2\phi^2 \right] .$$

また，場とその共役量についての交換関係を以下のように仮定する：

$$\begin{aligned} [\phi(\mathbf{x}), \pi(\mathbf{y})] &= i\delta^3(\mathbf{x}-\mathbf{y}) , \\ [\phi(\mathbf{x}), \phi(\mathbf{y})] &= [\pi(\mathbf{x}), \pi(\mathbf{y})] = 0 . \end{aligned}$$

このとき，ハミルトニアンは次のように書き換えられることを示せ。

$$H = \int \frac{d^3\mathbf{q}}{(2\pi)^3} \omega_{\mathbf{q}} \left(a_{\mathbf{q}}^\dagger a_{\mathbf{q}} + \frac{1}{2} \left[a_{\mathbf{q}}, a_{\mathbf{q}}^\dagger \right] \right) .$$

ここで，フーリエ変換は次で与えられるものとする。

$$\begin{aligned} \phi(\mathbf{x}) &= \int \frac{d^3\mathbf{q}}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2\omega_{\mathbf{q}}}} \left(a_{\mathbf{q}} e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{x}} + a_{\mathbf{q}}^\dagger e^{-i\mathbf{q}\cdot\mathbf{x}} \right) , \\ \pi(\mathbf{x}) &= \int \frac{d^3\mathbf{q}}{(2\pi)^3} (-i) \sqrt{\frac{\omega_{\mathbf{q}}}{2}} \left(a_{\mathbf{q}} e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{x}} - a_{\mathbf{q}}^\dagger e^{-i\mathbf{q}\cdot\mathbf{x}} \right) . \end{aligned}$$

ここまで，$\omega_{\mathbf{q}} \equiv \sqrt{\mathbf{q}^2 + m^2}$ を用いている。また，$\int d^3\mathbf{x}\, e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{x}} = (2\pi)^3\delta^3(\mathbf{q})$ である。ちなみに，交換関係から $\left[a_{\mathbf{q}}, a_{\mathbf{q}'}^\dagger \right] = (2\pi)^3\delta^3(\mathbf{q}-\mathbf{q}')$ である。

以上