量子力学II

期末テスト

1. エルミート多項式 $H_n(x)$ の母関数は

$$\exp(2xt - t^2) = \sum_{n=0}^{\infty} H_n(x) \frac{t^n}{n!} \tag{1}$$

である。また，直交関係式

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp(-x^2) H_n(x) H_m(x) dx = \begin{cases} 0 & n \neq m \text{ のとき} \\ \sqrt{\pi} 2^n n! & n = m \text{ のとき} \end{cases} \tag{2}$$

が成立する。
以下の問いに答えなさい。

(a) 次の漸化式を証明しなさい。

$$H_{n+1}(x) - 2xH_n(x) + 2nH_{n-1}(x) = 0 \tag{3}$$

$$H_n'(x) = 2nH_{n-1}(x) \tag{4}$$

(b) 次の式を証明しなさい。

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp(-x^2) x^2 [H_n(x)]^2 dx = \sqrt{\pi} 2^n n! \left(n + \frac{1}{2}\right) \tag{5}$$

2. 真空中の磁場内で運動する質量 m，電荷 $-e$ の電子を考える。この磁場は，ベクトルポテンシャル $\mathbf{A} = (A_x, A_y, A_z)$ を用いて，$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$ によって表すことができる。以下の問いに答えなさい。

(a) 以下のような方法で古典的なハミルトニアン H を求めてみよう。

i. ラグランジアン L は

$$L = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - e(\dot{x}A_x + \dot{y}A_y + \dot{z}A_z)$$

で与えられる。ラグランジアン L を用いて，運動量 p_x が,

$$p_x = m\dot{x} - eA_x$$

となることを示しなさい。同様に, p_y，p_z を求めなさい。ただし, $\dot{x} = \frac{dx}{dt}$, $\dot{y} = \frac{dy}{dt}$，$\dot{z} = \frac{dz}{dt}$ である。

ii. **ハミルトニアン** H **は**

$$H = p_x\dot{x} + p_y\dot{y} + p_z\dot{z} - L$$

で与えられる。ハミルトニアンを p_x, p_y, p_z, A_x, A_y, A_z, m, e **を用いて表しなさい。**

(b) **次に電子の運動を量子力学的に考えよう。今，ベクトルポテンシャル** $\mathbf{A}$ **を，磁場の大きさ** B **を用いて，** $\mathbf{A} = (0, xB, 0)$ **とする。**

i. **量子力学におけるハミルトニアン** $\hat{H}$ **を求めなさい。**

ii. **ハミルトニアン** $\hat{H}$ **の固有関数** $\phi(x, y, z)$ **を**

$$\phi(x, y, z) = f(x)\exp[i(k_y y + k_z z)]$$

とする。ただし， k_y, k_z **は電子の波数ベクトルの** y **成分，** z **成分である。エネルギー固有値を求めなさい。**

以上

参考：　一次元調和振動子のハミルトニアンは

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{1}{2}m\omega^2 x^2$$

で，固有値は

$$\left(n + \frac{1}{2}\right)\hbar\omega \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots)$$

である。