量子力学I

期末テスト

1. 質量 m の粒子の定常状態を表す波動関数が以下で与えられている。

$$\phi(x) = \begin{cases} \frac{A}{\sqrt{2}} \exp\left\{\frac{\pi(x+L)}{4L}\right\} & (x \le -L) \\ A\cos\frac{\pi x}{4L} & (-L \le x \le L) \\ \frac{A}{\sqrt{2}} \exp\left\{-\frac{\pi(x-L)}{4L}\right\} & (x \ge L) \end{cases}$$

ここで A 及び L は正の実数定数である。この状態は1次元の定常状態を表すシュレディンガー方程式に従い，あるエネルギー E_0 を固有値とする固有状態である。このとき以下の問いに答えなさい。

(a) この波動関数を規格化し，正の実数定数 A を求めなさい。

(b) 期待値 $\langle x^2 \rangle$ 及び $\langle p_x^2 \rangle$ を求めなさい。ただし，p_x は粒子の運動量を表している。なお，必要であれば，下記の不定積分 (C は積分定数) を使ってよい。

$$\int x^2 \cos^2 x \, dx = \frac{x^3}{6} + \frac{x\cos(2x)}{4} + \frac{(2x^2-1)\sin(2x)}{8} + C$$

$$\int x^2 e^{2x} dx = \frac{2x^2 - 2x + 1}{4} e^{2x} + C$$

(c) エネルギー固有値 E_0 及びポテンシャルを求めなさい。ただし，ポテンシャルの値は $x \to \pm\infty$ でゼロであるとする。なお，ポテンシャルは x の範囲についてきちんと場合分けして表すこと。

2. 3次元球対称ポテンシャル中の質量 m の粒子の基底状態が，定常状態を表す波動関数

$$\phi(r) = Ce^{-\frac{r}{a}}$$

で表されるとする。ただし C，a は正の実数定数である。また，r は3次元極座標における動径座標である。このとき以下の問いに答えなさい。なお，必要であれば

$$\int_0^\infty r^n e^{-\alpha r} dr = \frac{n!}{\alpha^{n+1}} \qquad (\alpha > 0, n \text{ はゼロ以上の整数})$$

を使ってよい。

(a) この波動関数を規格化し，正の実数定数 C を求めなさい。

(b) 期待値 $\langle \frac{1}{r} \rangle$ 及び $\langle r^2 \rangle$ を求めなさい。

(c) 基底状態のエネルギー E_1 及びポテンシャルを求めなさい。ただし，ポテンシャルの値は $r \to \infty$ でゼロであるとする。

3. 粒子のスピンが以下のシュレディンガー方程式で表されるとする。

$$i\hbar \frac{d}{dt}\chi(t) = H\chi(t)$$

ただし，

$$\chi(t) = \begin{pmatrix} \chi_1(t) \\ \chi_2(t) \end{pmatrix}, \quad H = \hbar\mu \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

であるとする。以下の問いに答えなさい。

(a) 時刻 $t = 0$ で

$$\chi(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

であるとき，$\chi(t)$ を求めなさい。

(b) スピンが上の問題の解で表されるとき，スピン成分の期待値 $\langle s_x \rangle$，$\langle s_y \rangle$，$\langle s_z \rangle$ を求めなさい。ただしここで，

$$s_x = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad s_y = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad s_z = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

である。

以上