物理数学 I

期末テスト

1. いくつかの関数の積で表される関数の導関数は，一つの関数の導関数と残りの関数の積という形の線形結合で表される。例えば，$\{f(x)g(x)\}' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$ のように。同様に，いくつかのスカラー場やベクトルの積，内積，外積で表される場の勾配，発散，回転も，ある一つの場の勾配，発散，回転と残りの場の積，内積，外積の形の線形結合で表されることが多い。例として，$\nabla(fg) = (\nabla f)g + f\nabla g$ があげられる。
   以下のものについて，上で述べたような線形結合で表しなさい。導出について簡潔に記すこと。ここで，ϕ はスカラー場，$\mathbf{A}$，$\mathbf{B}$ はベクトル場である。

   (a) $\nabla \cdot (\phi \mathbf{A})$

   (b) $\nabla \times (\phi \mathbf{A})$

   (c) $\nabla \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B})$

2. $x^2 + y^2 = z^2$，$0 \le z \le a$ (a は正の定数) をみたす点の集合を曲面 Σ とする。曲面の向きは，Σ 上の点から $z > 0$ の z 軸上の点に向かう向きとする。また，ベクトル場 $\mathbf{E}$ が次のように与えられているとする。

$$\mathbf{E} = x^2 y \mathbf{e}_x + x^3 y^2 \mathbf{e}_y + x^4 y^3 \mathbf{e}_z$$

   以下の問いに答えなさい。

   (a) 曲面 Σ の概形をかきなさい。

   (b) $\nabla \times \mathbf{E}$ を計算して求めなさい。

   (c) 面積分 $\int_\Sigma (\nabla \times \mathbf{E}) \cdot d\sigma$ を具体的に計算して求めなさい。

   (d) 上の結果はストークスの定理によれば，$\mathbf{E}$ のある閉曲線上の線積分によって求められる。この線積分を行うべき閉曲線を適当なパラメータを用いて表しなさい。

   (e) 上で述べた閉曲線上の線積分を具体的に計算し求めなさい。

以上