One-loop finiteness and Graphs

Kiyoshi Shiraishi (Yamaguchi University)

one-loop effective lagrangian

$$Z \propto (\det(-\nabla^2+\Delta))^{-1/2} = \exp\left[-\frac{1}{2}\mathrm{Tr}\ln(-\nabla^2+\Delta)\right]$$

<u>*effective action*</u>

$$\ln(-\nabla^2+\Delta) = -\int \frac{dt}{t}\exp\left[-(-\nabla^2+\Delta)t\right]$$

in <u>flat</u> D-dimensional spacetime:

$$\mathrm{Tr}\exp\left[-(-\nabla^2)t\right] = \int \frac{d^Dp}{(2\pi)^L}\exp(-p^2t) = \frac{1}{(4\pi)^{D/2}}t^{-D/2}$$

Heat kernel of a Graph

$$\mathrm{Tr}\exp\left[-\Delta t\right]$$
$$= p - (\mathrm{Tr}\,D)t + \frac{1}{2}\left[\mathrm{Tr}\ D^{2} + \mathrm{Tr}\,D\right]t^2 - + \ldots$$

なので（<u>4次元時空では</u>）one-loop lagrangian の四次，二次，ログ発散の因子は**グラフの次数行列（と位数）のみに依存**

結局のところ $\sum_a m_a^2 = \mathrm{Tr}\,D$, $\sum_a m_a^4 = \mathrm{Tr}\ D^2 + \mathrm{Tr}\,D$

Induced gravity from graph theory space

in <u>curved</u> D-dimensional spacetime:

$$\mathrm{Tr}\exp\left[-(-\nabla^2)t\right] = \frac{\sqrt{g}}{(4\pi)^{D/2}}t^{-D/2}(a_0 + a_1 t + \ldots)$$

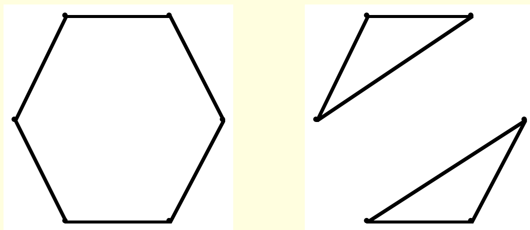
scalar ；a_0=1，a_1=(1/6- ξ) ***R*****,** ξ はスカラー２次と R の結合
Dirac ；（全体に負号が付く）a_0=tr$\mathbb{1}$，　a_1=-tr$\mathbb{1}$(1/12) ***R***
massive vector；a_0=D-1, a_1=(-1+(D-1)/6) ***R***

***R* は四次元時空のスカラー曲率**

Maxwell field １：Dirac field １：real minimal scalar field １で，おのおのが次数のすべて等しいグラフ上にあれば，***R*** の係数の発散まで打ち消し合う。

しかし，グラフが異なれば，質量スペクトルは異なるので，有限値は残る。**有限のニュートン定数，宇宙定数。**

(N. Kan and K. Shiraishi, gr-qc/0310055)



これら２つのグラフの頂点の次数はすべて２

effective potential for the zero mode of link fields

隣接行列 A に phase（絶対値１）の重み (weight)（但し A はエルミート行列）→次数行列 D と隣接行列 A の関係は変わらない→UV 発散の様子はこれらの場合変わらない

リンク場 U のゼロモードの potential は one-loop finite

cf. vacuum gauge field (細谷機構)，Scherk-Schwarz 機構（$N\to\infty$　$C_N \to S^1$）

p=q の場合，グラフに一つ閉路が含まれる。その長さを N とする。Graph Heat Kernel を展開すると，t の N 次ではじめて **$A^{N\sim}$ Re Tr [U U…U]**，（ここで閉路上の U が並ぶ。）故に non-Abelian でも場に依存した発散項はない。

しかもたいていこの項が effective potential に効くので，グラフに含まれる閉路の長さで potential の概形は決まる。

q>p の場合で，さらに plaquette 項が絡んでくる場合
→余次元空間上の"flux"の類似が可能。

Graph Hosotani Model?

細谷機構で non-Abelian gauge symmetry の破れを実現するには，境界条件の工夫，オービフォルドの使用などが重要。

上の定性的議論から，graph 上の理論においても，
何らかの工夫が必要。

▲境界条件？　一般のグラフの上では不自然？
▲オービフォルド？　端点を持つグラフ，端点のみに質量項
　→量子補正が制御できない？
　振幅の対称性による抽出と見る方がよさそう
○場によって，リンク場 **U** と結合する/しない edge を持つグラフを選択。