有限温度の場の理論入門

白石　清（山口大学理学部）

平成20 年 6 月 17 日

概 要

有限温度の場の理論に関する講義ノートです。暑い夏の夜にどうぞ。Imaginary time formalism に専念しました。２００８年多粒子相関系特論用。

目次

1 Introduction

われわれは，なぜ有限温度の場の理論（熱場の理論）を勉強するのか？

- 初期宇宙における相転移の研究のため
- 重力と熱力学の関係の研究のため

最初の目的は，インフレーションの力学，バリオン数生成，クォークグルーオンプラズマなど，宇宙の成り立ちに関わる重要な事項の探究である。

二番目は，ホーキング輻射など，重力場中の量子論との関係で応用される。また，最近の AdS/CFT 対応の研究により，強結合ゲージ理論の有限温度の振る舞いは，ブラックホールをブレーン等で形成する事により調べられることが明らかになってきた。このことにより，宇宙初期及びハドロン衝突の物理が解明されることが期待される。

熱い宇宙では，ボソンとフェルミオンの統計性の違いから，超対称性もある意味で破れる。これも興味深い事柄の 1 つである。

また，カルツァクライン理論のようにコンパクト化された時空における量子論は，有限温度理論と同様の計算テクニックで扱われる。要は，状態のエネルギースペクトルの扱い（適当な状態和）が共通の視点であるということであるから，関連する数理としてスペクトル幾何学の学習に敷衍して行くのも面白い。

ここではプランク定数，光速，及びボルツマン定数は 1 とする。

$$\hbar = c = k_B = 1 \tag{1}$$

また温度の逆数を $\beta \equiv 1/T$ で表す。

2 量子統計

量子統計では，同種粒子の区別をしない。例えば 2 つ電子がある場合，それぞれの電子に identity ＝個性は無い。量子場の理論では，このことは「粒子は場の（振動モードの）励起である」として認識されている。

系のエネルギー固有状態を $|n\rangle$ で表す。ハミルトニアンを H として

$$H|n\rangle = E_n|n\rangle \tag{2}$$

という固有値 E_n を持つとする記法である。

系に於いて $|n\rangle$ を見いだす確率を p_n としよう。ただし，p_n は次の式を満たす。

$$0 \le p_n \le 1, \quad \sum_n p_n = 1 \tag{3}$$

このとき物理量 A の統計平均は

$$\langle A \rangle \equiv \sum_n p_n \langle n|A|n \rangle \equiv \sum_n p_n A_n \tag{4}$$

ここで $A_n = \langle n|A|n \rangle$ は状態 n における A の量子力学的期待値である。

さて「系に於いて … を見いだす」と軽く書いたが，熱力学的アンサンブルにおいて考えると，熱平衡（温度 T）では確率はボルツマン因子で与えられる（ということを原理として採用）。

$$p_n = \frac{1}{Z}\, e^{-\beta E_n} \tag{5}$$

ここで $Z(\beta)$ は分配関数と呼ばれ，

$$Z = \sum_n e^{-\beta E_n} = \sum_n \langle n|e^{-\beta H}|n \rangle \tag{6}$$

または

$$Z(\beta) = \mathrm{Tr}\ e^{-\beta H} \tag{7}$$

と記す。

A の（熱力学的）平均を考えると，

$$\begin{aligned} \langle A \rangle_\beta &= \sum_n p_n \langle n|A|n \rangle \\ &= \frac{1}{Z(\beta)} \sum_n e^{-\beta E_n} \langle n|A|n \rangle \\ &= \frac{1}{Z(\beta)} \sum_n \langle n|e^{-\beta H} A|n \rangle \\ &= \frac{1}{Z(\beta)} \mathrm{Tr}\,(e^{-\beta H} A) \\ &= \frac{\mathrm{Tr}\,(e^{-\beta H} A)}{\mathrm{Tr}\ e^{-\beta H}} \end{aligned} \tag{8}$$

と書け，特に

$$\begin{aligned} \langle H \rangle_\beta &\equiv U = \frac{\mathrm{Tr}\,(e^{-\beta H} H)}{\mathrm{Tr}\ e^{-\beta H}} \\ &= \frac{1}{Z}\left(-\frac{\partial Z}{\partial \beta}\right) = -\frac{\partial}{\partial \beta} \ln Z(\beta) \end{aligned} \tag{9}$$

である。

系のエントロピーは

$$S = -\sum_n p_n \ln p_n = -\langle \ln p \rangle \tag{10}$$

であり，$S \geq 0$ を満たす（練習問題：これを示せ，等号が成り立つのはどのようなときか)。熱平衡系では

$$\begin{aligned} S &= -\sum_n p_n \ln p_n = -\sum_n p_n(-\beta E_n - \ln Z(\beta)) \\ &= \beta \sum_n p_n E_n + \ln Z(\beta) \sum_n p_n \\ &= \beta U + \ln Z(\beta) \\ &= -\beta \frac{\partial}{\partial \beta} \ln Z(\beta) + \ln Z(\beta) \\ &= -\beta^2 \frac{\partial}{\partial \beta} \left(\frac{1}{\beta} \ln Z(\beta) \right) \end{aligned} \tag{11}$$

となる。

また，自由エネルギーは

$$F(\beta) \equiv U - \frac{S}{\beta} = -\frac{1}{\beta} \ln Z(\beta) \tag{12}$$

と書くことができる。これは

$$Z(\beta) = e^{-\beta F} \tag{13}$$

と言うことである。

内部エネルギーとエントロピーは自由エネルギーから次のように導かれることはすぐに再確認できる。

$$U = -\frac{\partial}{\partial \beta} \ln Z(\beta) = \frac{\partial}{\partial \beta}(\beta F) = F + \beta \frac{\partial F}{\partial \beta} \tag{14}$$

$$S = -\beta^2 \frac{\partial}{\partial \beta} \left(\frac{1}{\beta} \ln Z(\beta) \right) = \beta^2 \frac{\partial F}{\partial \beta} \tag{15}$$

3　調和振動子

3.1　調和振動子スペクトルと分配関数

3.1.1　Bosonic oscillator

1 次元調和振動子を考える。

$$E_n = \left(n + \frac{1}{2}\right)\omega \tag{16}$$

なので分配関数は

$$\begin{aligned}
Z(\beta) &= \mathrm{Tr}\, e^{-\beta H} = \sum_n e^{-\beta E_n} \\
&= \sum_n e^{-\beta\left(n+\frac{1}{2}\right)\omega} \\
&= e^{-\frac{\beta\omega}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} e^{-n\beta\omega} \\
&= \frac{e^{-\frac{\beta\omega}{2}}}{1 - e^{-\beta\omega}} = \frac{1}{e^{\frac{\beta\omega}{2}} - e^{-\frac{\beta\omega}{2}}} = \frac{1}{2\sinh\frac{\beta\omega}{2}}
\end{aligned} \tag{17}$$

したがって内部エネルギーは

$$U = \frac{\omega}{2} + \frac{\omega}{e^{\beta\omega} - 1} \tag{18}$$

であることがわかる。この第 1 項はゼロ点エネルギー，第 2 項にはプランク分布が見えていることに注意しよう。なお，低温・高温のそれぞれの極限では

$$\beta\omega \gg 1 \qquad U \approx \frac{\omega}{2} \tag{19}$$

$$\beta\omega \ll 1 \qquad U \approx \frac{1}{\beta} = k_B T \tag{20}$$

が得られる。

自由エネルギーは

$$F(\beta) = -\frac{1}{\beta}\ln Z(\beta) = \frac{\omega}{2} + \frac{1}{\beta}\ln(1 - e^{-\beta\omega}) \tag{21}$$

となる。

3.1.2 Fermionic oscillator

２準位系

$$E_0 = -\frac{\omega}{2}, \quad E_1 = \frac{\omega}{2} \tag{22}$$

では，分配関数は

$$Z(\beta) = \mathrm{Tr}\, e^{-\beta H} = e^{-\beta E_0} + e^{-\beta E_1} = 2\cosh\frac{\beta\omega}{2} \tag{23}$$

であり，内部エネルギーは

$$U = -\frac{\omega}{2} + \frac{\omega}{e^{\beta\omega}+1} \tag{24}$$

となる。

自由エネルギーは

$$F(\beta) = -\frac{1}{\beta}\ln Z(\beta) = -\frac{\omega}{2} - \frac{1}{\beta}\ln(1+e^{-\beta\omega}) \tag{25}$$

となる。

3.2 経路積分と分配関数の関係

3.2.1 遷移振幅

経路積分によると，質量 m,（角）振動数 ω の調和振動子における遷移振幅は

$$\begin{aligned}\langle x_f, T | x_i, 0\rangle &= \langle x_f | e^{-iHT} | x_i\rangle \\ &= \mathcal{N}\int \mathcal{D}x\, e^{iS[x]} = \sqrt{\frac{m\omega}{2\pi i \sin\omega T}}\, e^{iS[x_e]}\end{aligned} \tag{26}$$

で与えられる（time interval T を温度と混同しないように）。ここで $S[x_e]$ は古典経路を入れたアクション

$$S[x_e] = \frac{m\omega}{2\sin\omega T}[(x_i^2 + x_f^2)\cos\omega T - 2x_i x_f] \tag{27}$$

である（練習問題：これを導け）。

さて，分配関数の表現として

$$Z(\beta) = \mathrm{Tr}\, e^{-\beta H} \tag{28}$$

を考えると，位置表示を用いて

$$Z(\beta) = \int dx \, \langle x | e^{-\beta H} | x \rangle \tag{29}$$

として考えることができる。この形は，さきの遷移振幅で

$$T = -i\beta, \quad x_f = x_i = x \tag{30}$$

としたものを integrand に使えばよいことがわかる。したがって調和振動子の分配関数は次のように求められる。

$$\begin{aligned} Z(\beta) &= \int dx \sqrt{\frac{m\omega}{2\pi \sinh \beta\omega}} \exp\left[-\frac{m\omega}{2\sinh\beta\omega}(2x^2\cosh\beta\omega - 2x^2)\right] \\ &= \sqrt{\frac{m\omega}{2\pi\sinh\beta\omega}} \int dx \, e^{-m\omega \tanh\frac{\beta\omega}{2} x^2} \\ &= \sqrt{\frac{m\omega}{2\pi\sinh\beta\omega}} \sqrt{\frac{\pi}{m\omega\tanh\frac{\beta\omega}{2}}} \\ &= \frac{1}{2\sinh\frac{\beta\omega}{2}} \end{aligned} \tag{31}$$

これはさきにエネルギースペクトルから求めたものと完全に一致する。

3.2.2　問題

Fermionic oscillator の分配関数を経路積分による遷移振幅から導け（「境界条件」,「グラスマン積分」に気をつける）[5]。

4　虚時間定式化

4.1　経路積分再訪

シュレディンガー方程式

$$i\frac{\partial \psi}{\partial t} = H\psi \tag{32}$$

の解は形式的に

$$\psi(t) = e^{-iHt}\psi(0) \tag{33}$$

であることからわかるように，

$$\begin{aligned}\langle x_f, T | x_i, 0\rangle &= \langle x_f | e^{-iHT} | x_i\rangle \\ &= \int \mathcal{D}x \int \mathcal{D}p\, e^{i\int_0^T dt[p\dot{x}-H(p,x)]} \end{aligned} \tag{34}$$

ここで

$$t = -i\tau, \quad T = -i\beta, \quad x_f = x_i = x \tag{35}$$

すなわち $x(\beta) = x(0)$ とすると

$$Z = \mathrm{Tr}\ e^{-\beta H} = \int \mathcal{D}x \int \mathcal{D}p\, e^{\int_0^\beta d\tau[ip\dot{x}-H(p,x)]} \tag{36}$$

である。ただしここではドットは τ 微分。

カノニカルな場合，

$$H = \frac{1}{2m}p^2 + V(x) \tag{37}$$

のとき p 積分を実行すれば（ガウス積分），

$$Z = \mathcal{N} \int \mathcal{D}x\, e^{-\int_0^\beta d\tau\left[\frac{1}{2}m\dot{x}^2 + V(x)\right]} \tag{38}$$

4.2 調和振動子再訪

上の表現から直接調和振動子の分配関数を計算してみよう。まずガウス積分

$$\int \mathcal{D}x\, e^{-\frac{1}{2}xAx} = \frac{N'}{\sqrt{\det A}} \tag{39}$$

である。ここで，x の境界を固定していないことに注意。A が対角化されていればその固有関数で積分すればよく

$$\prod_n \int_{-\infty}^{\infty} dx_n\, e^{-\frac{1}{2}a_n x_n^2} = \prod_n \sqrt{\frac{2\pi}{a_n}} \tag{40}$$

のように実行される。

調和振動子の場合，

$$A = -\frac{d^2}{d\tau^2} + \omega^2 \tag{41}$$

である（定数 m は 1 とおく；あっても後の積分定数に含まれるだけ）。

さて周期関数は $\{e^{i(2\pi/\beta)n\tau}\}$ で展開されるから

$$\det A = \prod_{n=-\infty}^{\infty} \left(\frac{4\pi^2 n^2}{\beta^2} + \omega^2\right) \tag{42}$$

となる。これを評価するには以下のようにする。まず A において $\omega \to x$ とすると

$$\frac{d}{d(x^2)} \ln \det A = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{\frac{4\pi^2 n^2}{\beta^2} + x^2} = \frac{1}{x^2} + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\frac{4\pi^2 n^2}{\beta^2} + x^2} \tag{43}$$

であるが，

$$\coth \pi y = \frac{y}{\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{n^2 + y^2} = \frac{1}{\pi y} + \frac{2y}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + y^2} \tag{44}$$

なので

$$\frac{d}{d(x^2)} \ln \det A = \frac{\beta}{2x} \coth \frac{\beta x}{2} \tag{45}$$

すなわち

$$\frac{d}{dx} \ln \det A = \beta \coth \frac{\beta x}{2} \tag{46}$$

であることがわかる。

よって

$$\ln \left(\frac{\det A}{C} \right) = \int_0^{\beta\omega} dx \coth \frac{x}{2} = \beta\omega + 2 \ln(1 - e^{-\beta\omega}) \tag{47}$$

つまり

$$\det A = 4C \sinh^2 \frac{\beta\omega}{2} \tag{48}$$

自由エネルギーは

$$F = -\frac{1}{\beta} \ln Z = \frac{\omega}{2} + \ln(1 - e^{-\beta\omega}) + \frac{\ln C}{2\beta} \tag{49}$$

最後の項は内部エネルギーなどに効かないのでたいてい無視できる（有限体積の宇宙の場合などは注意を要する）。

4.3 ユークリッドアクション

結局，ミンコフスキー時空でのラグランジアンが

$$L = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 - V(x) \tag{50}$$

のとき経路積分による（ソースのない）分配関数は

$$Z = \mathcal{N} \int \mathcal{D}x \, e^{iS[x]} = \mathcal{N} \int \mathcal{D}x \, e^{i \int_0^t dt \, L} \tag{51}$$

であるが，これをユークリッド化したもの，

$$Z = \mathcal{N} \int \mathcal{D}x\, e^{-\int_0^\tau d\tau \left(\frac{1}{2}m\dot{x}^2 + V(x)\right)} \tag{52}$$

ただしここではドットは τ による微分，において周期 β にわたる積分，および周期境界条件を付けることによって熱力学的分配関数を計算することができる。

5 熱場の理論

5.1 場の経路積分

場の理論においても，虚時間定式化により熱力学関数を求めることができる。

ハミルトニアンが次の形で与えられるとき

$$H = \int d^3\mathbf{x} \left[\frac{1}{2}\pi^2 + \frac{1}{2}(\nabla\phi)^2 + V(\phi)\right] = \int d^3\mathbf{x}\, \mathcal{H} \tag{53}$$

前節同様，経路積分に虚時間 τ を用いた定式化を適用すると（ドットは τ 微分）

$$Z = \int \mathcal{D}\pi \int \mathcal{D}\phi \exp\left\{\int_0^\beta d\tau \int d^3\mathbf{x} \left[i\pi\dot{\phi} - \mathcal{H}\right]\right\} \tag{54}$$

そして $\phi(\tau, \mathrm{x}) = \phi(\tau + \beta, \mathrm{x})$ を満たす周期性を考慮。

前節同様，π を integrate out すると

$$Z(\beta) = \mathcal{N} \int \mathcal{D}\phi\, e^{-\int_0^\beta d\tau \int d^3\mathbf{x} \left[\frac{1}{2}(\dot{\phi}^2 + (\nabla\phi)^2) + V(\phi)\right]} \tag{55}$$

5.2 ユークリッド化のまとめ

ミンコフスキー時空では

$$Z = \mathcal{N} \int \mathcal{D}\phi\, e^{iS} \tag{56}$$

ここで

$$S = \int d^4x \left[\frac{1}{2}(\partial\phi)^2 - V(\phi)\right] = \int dt\, d^3\mathbf{x} \left[\frac{1}{2}(\dot{\phi}^2 - (\nabla\phi)^2) - V(\phi)\right] \tag{57}$$

有限温度系にするには，ユークリッド時間 τ を用いる。

$$t = -i\tau \tag{58}$$

すると

$$Z = \mathcal{N}\int \mathcal{D}\phi\, e^{-S_E} \tag{59}$$

ここで

$$\begin{aligned} S_E &= \int d\tau\, d^3\mathbf{x} \left[\frac{1}{2}(\bar{\partial}\phi)^2 + V(\phi)\right] \\ &= \int d\tau\, d^3\mathbf{x} \left[\frac{1}{2}(\dot{\phi}^2 + (\nabla\phi)^2) + V(\phi)\right] \end{aligned} \tag{60}$$

ただしここではドットは τ 微分。S_E はエネルギーのように正定値の積分である事に注意。

統計力学の分配関数は

$$\begin{aligned} Z(\beta) &= \mathcal{N}\int_{\phi(0)=\phi(\beta)} \mathcal{D}\phi\, e^{-S_E} \\ &= \mathcal{N}\int_{\phi(0)=\phi(\beta)} \mathcal{D}\phi\, e^{-\int_0^\beta d\tau \int d^3\mathbf{x}\, \mathcal{L}_E} \end{aligned} \tag{61}$$

のように表される。ここでスカラー（ボソン）場は虚時間に対して周期境界条件

$$\phi(\tau+\beta) = \phi(\tau) \tag{62}$$

を満たすことを示した。

ディラック場の場合も同様に

$$\begin{aligned} Z(\beta) &= \mathcal{N}\int \mathcal{D}\overline{\psi}\mathcal{D}\psi\, e^{-S_E[\psi,\overline{\psi}]} \\ &= \mathcal{N}\int \mathcal{D}\overline{\psi}\mathcal{D}\psi\, e^{-\int_0^\beta d\tau \int d^3\mathbf{x}\, \mathcal{L}_E[\psi,\overline{\psi}]} \end{aligned} \tag{63}$$

となる。ただし境界条件には注意を要する：

$$\psi(0) = -\psi(\beta), \quad \overline{\psi}(0) = -\overline{\psi}(\beta) \tag{64}$$

これはフェルミオンの反交換特性によると解釈できる。[1]

[1] ゲージ理論に現れるゴーストは反交換するが境界条件はボソンと同じにする（有限温度でもＢＲＳＴ対称）。

6 One-loop 有効作用

6.1 「ゆらぎ」を integrate out する

スカラー場 ϕ を古典場 $\bar{\phi}$ と量子ゆらぎ φ に分ける。

$$\phi = \bar{\phi} + \varphi \tag{65}$$

古典場は運動方程式

$$\left.\frac{\delta S_E}{\delta \phi}\right|_{\phi=\bar{\phi}} = 0 \tag{66}$$

を満たすので[2]

$$Z = \mathcal{N} e^{-S_E[\bar{\phi},J]} \int \mathcal{D}\varphi \, \exp\left(-\frac{1}{2} \int_0^\beta d\tau \int d^3\mathbf{x} \, \varphi B \varphi \right) \tag{67}$$

ここで

$$B \equiv \left.\frac{\delta^2 S_E}{\delta \phi^2}\right|_{\phi=\bar{\phi}} \tag{68}$$

である。

ゆらぎのガウス積分を実行すると

$$Z = \mathcal{N}' e^{-S_E[\bar{\phi},J]} (\det B)^{-1/2} = \mathcal{N}' e^{-S_E[\bar{\phi},J] - \frac{1}{2}\mathrm{Tr}\,\ln B} \tag{69}$$

6.2 計算詳細

中性スカラー

$$L_E = \int d^3\mathbf{x} \left[\frac{1}{2}\dot{\phi}^2 + \frac{1}{2}(\nabla\phi)^2 + \frac{1}{2}m^2\phi^2 \right] \tag{70}$$

の場合，

$$B(\tau, \mathbf{x}; \tau', \mathbf{x}') = \left(-\frac{\partial^2}{\partial \tau^2} - \nabla^2 + m^2 \right) \delta(\tau - \tau') \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \tag{71}$$

で，フーリエモードに関するトレースを勘案して

$$\begin{aligned} \mathrm{Tr}\,\ln B &= \int_0^\beta d\tau \int d^3\mathbf{x} \frac{1}{\beta} \sum_n \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3} \ln(\omega_n^2 + \mathbf{k}^2 + m^2) \\ &= V \sum_n \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3} \ln(\omega_n^2 + \mathbf{k}^2 + m^2) \end{aligned} \tag{72}$$

[2] （通常の線形）ソースが入っててもよいので入れてある。

と評価される。ここで $\omega_n = 2\pi n/\beta$，V は系の体積である。

前々節の計算によれば，n の和は実行でき

$$\begin{aligned} \mathrm{Tr}\,\ln B &= V\int\frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3}\Big\{\beta\sqrt{\mathbf{k}^2+m^2}+2\ln(1-e^{-\beta\sqrt{\mathbf{k}^2+m^2}}) \\ &\qquad +(\sqrt{\mathbf{k}^2+m^2}\text{に独立な項})\Big\} \end{aligned} \tag{73}$$

であるから自由エネルギーは irrelevant な量を除いて次のようになる。

$$F = -\frac{1}{\beta}\ln Z = V\int\frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3}\left\{\frac{1}{2}\sqrt{\mathbf{k}^2+m^2}+\frac{1}{\beta}\ln(1-e^{-\beta\sqrt{\mathbf{k}^2+m^2}})\right\} \tag{74}$$

このように，one-loop（ガウシアン）自由場の自由エネルギーは，真空の寄与を除き，単純な分配関数の評価から得られるものと一致する。

質量のない，自己相互作用 $\frac{1}{4!}\lambda\phi^4$ を持つ中性スカラーでは

$$m^2 \to \frac{1}{2}\lambda\bar{\phi}^2 \tag{75}$$

と置くことにより，有限温度の有効ポテンシャルを求めることができる。

6.3　フェルミオン

フェルミオンの反対称特性により，ガウス積分はグラスマン数を用いたものになる。グラスマン数は

$$\theta\bar{\theta} = -\bar{\theta}\theta\,, \quad \theta^2 = 0 \tag{76}$$

などを満たす。

グラスマン数の積分は

$$\int d\theta = 0\,, \quad \int d\theta\theta = 1 \tag{77}$$

などで定義する。

このことにより

$$\int \mathcal{D}\psi\mathcal{D}\overline{\psi}\, e^{\overline{\psi}D\psi} \propto \det D \tag{78}$$

となる。ボソンの場合と違い，行列式の正べきである。

フェルミオンの場合，反周期境界条件より

$$\omega_n = \frac{2\pi}{\beta}\left(n+\frac{1}{2}\right) \tag{79}$$

また，ディラック場では，運動量表示で

$$D = i\gamma_\mu k_\mu + m \tag{80}$$

としてやればよい。ここで $k_4 \equiv \omega_n$ であり，γ は４次元ユークリッド空間におけるガンマ行列（４×４）である。このとき

$$\begin{aligned}
\ln\det D &= \mathrm{tr}\int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3}\ln(i\gamma_\mu k_\mu + m) \\
&= \mathrm{tr}\int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3}\ln[\gamma_5^2(i\gamma_\mu k_\mu + m)] \\
&= \mathrm{tr}\int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3}\ln[\gamma_5(i\gamma_\mu k_\mu + m)\gamma_5] \\
&= \mathrm{tr}\int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3}\ln(-i\gamma_\mu k_\mu + m)
\end{aligned} \tag{81}$$

と書ける（$\gamma_5^2 = 1$, $\gamma_5\gamma_\mu = -\gamma_\mu\gamma_5$）。したがって

$$\begin{aligned}
\ln\det D &= \frac{1}{2}\mathrm{tr}\int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3}[\ln(i\gamma_\mu k_\mu + m) + \ln(-i\gamma_\mu k_\mu + m)] \\
&= \frac{1}{2}\mathrm{tr}\,\mathbf{1}\int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3}\ln(k^2 + m^2) \\
&= 2\int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3}\ln(\mathbf{k}^2 + \omega_n^2 + m^2)
\end{aligned} \tag{82}$$

というように評価する事ができる（ω_n はボソンとフェルミオンでは異なることに注意）。

ディラックフェルミオン（電子など）では

$$F = -\frac{1}{\beta}\ln Z = 4V\int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3}\left\{-\frac{1}{2}\sqrt{\mathbf{k}^2 + m^2} - \frac{1}{\beta}\ln(1 + e^{-\beta\sqrt{\mathbf{k}^2+m^2}})\right\} \tag{83}$$

なぜ one-loop と言うのか？

上で見たように，ミンコフスキー時空の積分

$$\frac{1}{2}\int \frac{d^4k}{(2\pi)^4}\ln(k^2 + m^2) \tag{84}$$

において，$k^0 \to i\omega_n$，$\int \frac{dk^0}{2\pi} \to \frac{1}{\beta}\sum_n$ と置き換えると有限温度理論となる。

さて，

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\ln(k^2+m^2+\delta m^2) \\
=\;& \frac{1}{2}\ln(k^2+m^2)+\frac{1}{2}\ln\left(1+\frac{\delta m^2}{k^2+m^2}\right) \\
=\;& \frac{1}{2}\ln(k^2+m^2)+\sum_{p=1}^{\infty}\frac{(-1)^{p+1}}{2p}\left(\frac{1}{k^2+m^2}\delta m^2\right)^p \qquad (85)
\end{aligned}
$$

と書き変えると，プロパゲータで δm^2 を繋いだ輪が見えてくる（かいな）。因子 $1/p$ は輪の離散的回転対称性 Z_p の対称性を反映。ちなみに $1/2$ は輪の裏返し Z_2 の分と解釈される。

ボソンとフェルミオンの符号の違いも，ループについての負号というよく知られた事情と理解される。

プロパゲータは $\hbar$ に比例するので，one-loop 有効作用は，$\hbar$ に比例する。

6.4 高温極限

6.4.1 ボソンの場合

高温極限 $T \gg m$，あるいは質量のないスカラーについて（真空の寄与を除く）自由エネルギーは，

$$
F \approx \frac{V}{\beta^4}\int_0^{\infty}\frac{4\pi x^2 dx}{(2\pi)^3}\ln(1-e^{-x}) \qquad (86)
$$

と書け，

$$
\begin{aligned}
\int_0^{\infty}\frac{4\pi x^2 dx}{(2\pi)^3}\ln(1-e^{-x}) &= -\frac{1}{2\pi^2}\int_0^{\infty}dx\,x^2\sum_{p=1}^{\infty}\frac{e^{-px}}{p} \\
&= -\frac{\Gamma(3)}{2\pi^2}\sum_{p=1}^{\infty}\frac{1}{p^4} \\
&= -\frac{\Gamma(3)\zeta_R(4)}{2\pi^2} = -\frac{\pi^2}{90} \qquad (87)
\end{aligned}
$$

と計算が実行できる。ただし ζ_R はリーマンのゼータ関数，$\zeta_R(4)=\frac{\pi^4}{90}$。したがって

$$
\frac{F}{V} = -\frac{\pi^2}{90}T^4 \qquad (88)
$$

となり，このとき

$$P = \frac{\pi^2}{90}T^4, \quad \frac{S}{V} = \frac{2\pi^2}{45}T^4, \quad \rho \equiv \frac{U}{V} = \frac{\pi^2}{30}T^4 \tag{89}$$

である。状態方程式 $\rho = 3P$ が成り立つ。

6.4.2　フェルミオンの場合

高温極限 $T \gg m$ の電子・陽電子について（真空の寄与を除く）自由エネルギーは，

$$F \approx -4\frac{V}{\beta^4}\int_0^\infty \frac{4\pi x^2 dx}{(2\pi)^3}\ln(1+e^{-x}) \tag{90}$$

と書け，

$$\begin{aligned}\int_0^\infty \frac{4\pi x^2 dx}{(2\pi)^3}\ln(1+e^{-x}) &= \frac{1}{2\pi^2}\int_0^\infty dx\, x^2 \sum_{p=1}^\infty (-1)^{p-1}\frac{e^{-px}}{p} \\ &= \frac{\Gamma(3)}{2\pi^2}\sum_{p=1}^\infty \frac{(-1)^{p-1}}{p^4} \\ &= \frac{\Gamma(3)\eta_R(4)}{2\pi^2} = \frac{7}{8}\times\frac{\pi^2}{90}\end{aligned} \tag{91}$$

と計算が実行できる。ただし $\eta_R(4) = \frac{7}{8}\times\frac{\pi^4}{90}$。したがって

$$\frac{F}{V} = -\frac{7\pi^2}{180}T^4 \tag{92}$$

となり，このとき

$$P = \frac{7\pi^2}{180}T^4, \quad \frac{S}{V} = \frac{7\pi^2}{45}T^4, \quad \rho \equiv \frac{U}{V} = \frac{7\pi^2}{60}T^4 \tag{93}$$

である。状態方程式 $\rho = 3P$ が成り立つ。

7　一般化されたゼータ関数

7.1　スカラー場の自由エネルギーの評価

一般化されたゼータ関数を用いて

$$\zeta_B'(0) = -\ln\det B \tag{94}$$

と表すことができる。以下，添え字は略。

まず，次のように定義する。

$$\zeta(s) \equiv \sum_i \lambda_i^{-s} \tag{95}$$

ここで λ は B の固有値。すると，

$$\zeta'(s) = \frac{\partial}{\partial s} \sum_i e^{-s\ln\lambda_i} = -\sum_i \ln\lambda_i e^{-s\ln\lambda_i} \tag{96}$$

なので

$$\zeta'(0) = -\sum_i \ln\lambda_i = -\ln\prod_i \lambda_i = -\ln\det B \tag{97}$$

である。

さて，中性スカラー場の場合を見てみよう。まず，ゼータ関数をガンマ関数を用いて次のように表す。

$$\zeta(s) = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^\infty dt\, t^{s-1} \sum_i e^{-\lambda_i t} \tag{98}$$

さきに見たことから

$$\sum_i e^{-\lambda_i t} = V \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3} e^{-(\mathbf{k}^2+m^2)t} \sum_n e^{-\frac{4\pi^2 n^2}{\beta^2}t} \tag{99}$$

反転公式（Appendix 参照）により

$$\begin{aligned} \sum_i e^{-\lambda_i t} &= \frac{V\beta}{(4\pi t)^{1/2}} \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3} e^{-(\mathbf{k}^2+m^2)t} \sum_n e^{-\frac{\beta^2 n^2}{4t}} \\ &= \frac{V\beta}{16\pi^2 t^2} \sum_n e^{-\frac{\beta^2 n^2}{4t} - m^2 t} \end{aligned} \tag{100}$$

n の和において $n=0$ が（零度の）真空の寄与を与えるので，それを引いたものについて計算をする（つまりホントの有限温度の部分）。すると

$$\zeta(s) - \zeta_0(s) = \frac{V\beta}{8\pi^2\Gamma(s)} \sum_n{}' \left(\frac{4m^2}{\beta^2 n^2}\right)^{1-s/2} K_{2-s}(\beta m n) \tag{101}$$

となる。ここで

$$\Gamma(s) = \frac{1}{s} + \cdots \tag{102}$$

であること，および第 2 種変形ベッセル関数（マクドナルド関数）の積分表示

$$K_2(2\pi nz) = \frac{3z^2}{(2\pi n)^2}\int_0^\infty \frac{\cos 2\pi nt}{(t^2+z^2)^{5/2}}dt \tag{103}$$

そしてベルヌイ多項式

$$B_4(\{t\}) = -\frac{3}{\pi^4}\sum_{n=1}^\infty \frac{\cos 2\pi nt}{n^4} \tag{104}$$

（$\{t\}$ は t の小数部分）の具体的形を使うと，

$$\zeta'(0) - \zeta_0'(0) = \frac{V\pi^2 z^4}{\beta^3}\int_0^\infty \frac{\frac{1}{30} - \{t\}^2 + 2\{t\}^3 - \{t\}^4}{(t^2+z^2)^{5/2}}dt \tag{105}$$

（$z = \frac{\beta m}{2\pi}$）

結局

$$\frac{F}{V} = -\frac{1}{2\beta V}[\zeta'(0) - \zeta_0'(0)] = -\frac{\pi^2}{90}T^4 + \frac{1}{24}m^2T^2 - \frac{1}{12\pi}m^3T + \cdots \tag{106}$$

7.2　フェルミオンの場合

(105) で被積分関数の分子を

$$\frac{7}{240} - \frac{1}{2}[t]^2 + [t]^4 \tag{107}$$

（ただし，$[t]$ は t を整数 $\pm 1/2$ の範囲としたときのその整数を除いた部分）と変えたものが計算に現れる。

これから，電子では

$$\frac{F}{V} = -\frac{7}{180}T^4 + \frac{1}{12}T^2m^2 + \cdots \tag{108}$$

であることがわかる。m^3T に比例する項は現れない。

7.3　ナイーブな展開による評価

以上のように下記のような積分が現れた。

$$\frac{1}{\Gamma(s)}\int_0^\infty dt\, t^{s-3}\sum_{n=1}^\infty (\pm 1)^{n-1} e^{-\frac{\beta^2 n^2}{4t} - m^2 t} \tag{109}$$

これは

$$
\begin{aligned}
& \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^\infty dt\, t^{s-3} \sum_{n=1}^\infty (\pm 1)^{n-1} \left(\frac{2}{\beta n}\right)^{4-2s} e^{-\frac{1}{t}-\frac{\beta^2 m^2 n^2}{4} t} \\
= \; & \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^\infty dt\, t^{1-s} \sum_{n=1}^\infty (\pm 1)^{n-1} \left(\frac{2}{\beta n}\right)^{4-2s} e^{-t-\frac{\beta^2 m^2 n^2}{4t}} \qquad (110)
\end{aligned}
$$

と変形できる。さらに被積分関数の展開により

$$
\frac{\mu^{2s}}{\Gamma(s)} \left(\frac{2}{\beta}\right)^{4-2s} \sum_{p=0}^\infty \frac{1}{p!} \left(\frac{\beta^2 m^2}{4}\right)^p \Gamma(2-s-p)\zeta_R(4-2s-2p) \qquad (111)
$$

（または $\zeta \to \eta$）と書ける（質量次元を持つ μ を導入した）。

この展開では，m^3 の項が出ない様に見える。

ただし，スカラー場の m の偶数次項およびフェルミオン場の場合について，最初の２項はちゃんと出ているはず（チェックせよ）。

展開の方法で簡単に出すには，１０節参照（ラフに言えば反転前の式の展開）。

問題：ここでの展開でも，ちゃんと m^3 の項は入っていないとおかしい。残りの級数部分から再構成できるか？

8　間奏曲：ホーキング温度

ここでは $G=1$ とする。

Schwarzschild 時空

$$
ds^2 = -\left(1-\frac{2M}{r}\right) dt^2 + \frac{dr^2}{1-\frac{2M}{r}} + r^2 d\Omega^2 \qquad (112)
$$

で，$t \to i\tau$ とユークリッド化してみる。

$$
ds^2_{Euc} = \left(1-\frac{2M}{r}\right) d\tau^2 + \frac{dr^2}{1-\frac{2M}{r}} + r^2 d\Omega^2 \qquad (113)
$$

horizon（$r_H = 2M$）の近くでどうなっているだろう？

$R \equiv \sqrt{r-2M}$ という座標を使うと $R \approx 0$ のあたりでは，

$$
ds^2_{Euc} \approx 8M \left[dR^2 + R^2 \left(\frac{d\tau}{4M}\right)^2 \right] \qquad (114)
$$

（球面の項は省略）となっている。

一般には，$R=0$ は singular (conical singularity) であるが，τ を周期 β をもつ（角度）座標だとすると，

$$\beta = 8\pi M \tag{115}$$

のとき，「原点」は regular になる。

いままでの有限温度の理論を記述法によれば，β は温度の逆数となる。

したがって，black hole の背景では，温度

$$T_H = \frac{1}{8\pi M} \tag{116}$$

の系にいるのと等価である。[3] T_H を Hawking 温度という。

ちなみに，

$$T_H = \frac{\kappa}{2\pi} \tag{117}$$

ここで κ はブラックホール表面の重力（加速度）。[4]

熱力学関係式

$$dU = TdS \tag{118}$$

において，内部エネルギー U を black hole の質量 M と同一視する。さらに温度は Hawking 温度とおくと

$$dM = T_H dS \tag{119}$$

すなわち

$$dS = 8\pi M dM \tag{120}$$

これを積分すると

$$S = 4\pi M^2 = \frac{4\pi(2M)^2}{4} = \frac{A}{4} \tag{121}$$

ここで A は horizon の表面積。

ブラックホールはエントロピーをもっている！[5]

一般のブラックホールでも，エントロピー S は $A/4$ と表せる。[6]

なお，輻射とＢＨの共存系については，『絶対わかる熱力学』参照（元ネタは Davies）。

---

[3] $T_H = \frac{\hbar c^3}{8\pi GM}$

[4] 太陽質量の black hole では，$T_H \sim 10^{-7}$K。

[5] 太陽質量の black hole では，$S \sim 10^{77}$。

[6] G を復活させると，$S = \frac{A}{4G}$。

9 Beyond one-loop

9.1 プロパゲータとone-loop 質量補正

虚時間形式でソース J を導入する。

$$Z[J] = \int \mathcal{D}\phi \, e^{-S_E + \int d\tau \, d^3\mathbf{x} \, J\phi} \tag{122}$$

マトリックス的略記として下記のように表せば

$$\int \mathcal{D}\phi \, e^{-\frac{1}{2}\phi^T A\phi + J^T\phi} \tag{123}$$

（$A^T = A$ に注意,）変形

$$-\frac{1}{2}\phi^T A\phi + J^T\phi = -\frac{1}{2}(\phi^T - J^T A^{-1})A(\phi - A^{-1}J) + \frac{1}{2}J^T A^{-1}J \tag{124}$$

により，

$$Z[J] = (\det A)^{-1/2} \, e^{\frac{1}{2}J^T A^{-1}J} \tag{125}$$

と書き直せる。

自由場では

$$\mathrm{Tr} \left. \frac{\delta^2 \ln Z[J]}{\delta J \delta J} \right|_{J=0} = \mathrm{Tr}\, A^{-1} = \frac{1}{\beta}\sum_n \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3} \frac{1}{\mathbf{k}^2 + \omega_n^2 + m^2} \tag{126}$$

は $\langle\phi^2\rangle_\beta$ のことである。これは場の理論的には，プロパゲータのトレースである。

$\lambda\phi^4$ 理論で，場の理論的には，プロパゲータのトレースはプロパゲータに含まれる質量の 2 乗の one-loop 補正として現れる。[7]

$$\delta m^2 = \frac{1}{2}\lambda\langle\phi^2\rangle_\beta = \frac{\lambda}{2\beta}\sum_n \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3} \frac{1}{\mathbf{k}^2 + \omega_n^2 + m^2} \tag{127}$$

粒子の伝播の途中で,「熱浴」の「粒子」と相互作用しているイメージ。

9.2 積分の評価

具体的に積分を評価しよう。

$$I(m) = \frac{1}{\beta}\sum_n \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3} \frac{1}{\mathbf{k}^2 + \omega_n^2 + m^2} \tag{128}$$

[7] $Z[J]$ に $e^{-\frac{\lambda}{4!}\sum_x \frac{\delta^4}{\delta J_x^4}}$ を作用させる …

ここで $\omega_n = 2\pi n/\beta$。公式により

$$I(m) = \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{\mathbf{k}^2+m^2}} \left[\frac{1}{2} + \frac{1}{e^{\beta\sqrt{\mathbf{k}^2+m^2}}-1}\right] = I_0(m) + I_T(m) \quad (129)$$

温度によらない部分（零度理論の部分）

$$I_0(m) = \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3} \frac{1}{2\sqrt{\mathbf{k}^2+m^2}} \quad (130)$$

と温度による部分

$$I_T(m) = \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{\mathbf{k}^2+m^2}} \frac{1}{e^{\beta\sqrt{\mathbf{k}^2+m^2}}-1} \quad (131)$$

に分けることができる。

I_0 は 2 次発散する量で，質量に繰り込まれる。一方，I_T は

$$I_T = \frac{1}{2\pi^2\beta^2} \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{\infty} \frac{x^2 e^{-n\sqrt{x^2+\beta^2 m^2}}}{\sqrt{x^2+\beta^2 m^2}} dx \quad (132)$$

と書き換えられる。特に $T \gg m$ のときはこの表現によりすぐに評価でき

$$I_T \sim \frac{1}{2\pi^2\beta^2}\Gamma(2)\zeta_R(2) = \frac{1}{12\beta^2} = \frac{T^2}{12} \quad (133)$$

となる。

高温展開は，以前の結果を用いれば求められる。

$$I_T(m) = 2\int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3} \frac{1}{\beta} \frac{\partial}{\partial m^2} \ln(1 - e^{-\beta\sqrt{\mathbf{k}^2+m^2}}) \quad (134)$$

と書き直せるから，

$$\begin{aligned} I_T(m) &= 2\frac{\partial}{\partial m^2}\left[-\frac{\pi^2}{90}T^4 + \frac{1}{24}m^2T^2 - \frac{1}{12\pi}m^3T + \cdots\right] \\ &= \frac{T^2}{12} - \frac{mT}{4\pi} + \cdots \end{aligned} \quad (135)$$

高温 $\lambda\phi^4$ 理論での温度依存質量補正は

$$m_T^2 = \frac{1}{2}\lambda I_T \sim \frac{\lambda T^2}{24} \quad (136)$$

さて以前にもとめた

$$\frac{F}{V} = -\frac{\pi^2}{90}T^4 + \frac{1}{24}m^2T^2 - \frac{1}{12\pi}m^3T + \cdots \quad (137)$$

は，古典場の有効ポテンシャルと思えるが，ここで $m^2 = (\lambda/2)\bar{\phi}^2$ とすれば $\bar{\phi}^2$ の項は $\frac{\lambda}{48}T^2\bar{\phi}^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{\lambda}{24}T^2\right)\bar{\phi}^2$ となる。古典場の有効質量とさきの温度依存質量補正は，同等の近似の範囲で同じとなる。

9.3 自由エネルギーの two-loop 補正

two-loop，$O(\lambda)$ の自由エネルギー補正は

$$\frac{F_2}{V} = 3 \times \frac{\lambda}{4!} I_T^2 \sim \frac{\lambda T^4}{1152} \qquad T \gg m \tag{138}$$

よって $O(\lambda)$ までで

$$\frac{F}{V} = -\frac{\pi^2 T^4}{90}\left[1 - \frac{5\lambda}{64\pi^2} + \cdots\right] \qquad T \gg m \tag{139}$$

（massless limit では $\cdots$ は $O(\lambda^{3/2})$ であることが知られている。）

9.4 $O(N)$ モデル

9.4.1 one-loop

$O(N)$ モデルを導入する。（ミンコフスキー）ラグランジアン密度は

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\partial_\mu \phi_a \partial^\mu \phi_a - \frac{1}{2} m^2 \phi_a \phi_a - \frac{\lambda}{4!N}(\phi_a \phi_a)^2 \tag{140}$$

ただしここで $a = 1, \ldots, N$。N 次元内部空間での回転対称性を持っている。

ϕ_a を古典場と揺らぎに次のように分けるとすると

$$\phi_a = \bar{\phi}_a + \varphi_a \tag{141}$$

ゆらぎの質量項は

$$\frac{1}{2}\varphi_a M_{ab}^2 \varphi_b \tag{142}$$

ここで

$$M_{ab}^2 = \left[m^2 + \frac{\lambda}{6N}\bar{\phi}_c\bar{\phi}_c\right]\delta_{ab} + \frac{\lambda}{3N}\bar{\phi}_a\bar{\phi}_b \tag{143}$$

となる。この固有値が重要であるが，すぐにわかるように，$\bar{\phi}_a$ と内部空間で同じ向きを持つとき固有値は

$$m_1^2 = m^2 + \frac{\lambda}{2N}\bar{\phi}_c\bar{\phi}_c \tag{144}$$

直交する場合は

$$m_2^2 = m^2 + \frac{\lambda}{6N}\bar{\phi}_c\bar{\phi}_c \tag{145}$$

したがって one-loop で自由エネルギーは

$$\frac{F_1}{V} = \frac{1}{2\beta}\sum_n \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3} \ln[(\mathbf{k}^2+\omega_n^2+m_1^2)(\mathbf{k}^2+\omega_n^2+m_2^2)^{N-1}] \tag{146}$$

と書ける。

N が十分大きければ

$$\frac{F_1}{V} = \frac{N}{2\beta}\sum_n \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3} \ln(\mathbf{k}^2+\omega_n^2+m_2^2) \tag{147}$$

と近似できる（もちろん $N-1\sim N$）。

9.4.2 two-loop

two-loop ダイアグラムは $O(\lambda)$ のものと $O(\lambda^2)$ のもの[8] があるが，前者は Large N で $O(N^1)$，後者は $O(N^0)$ 以下である。したがって N が大きい極限で自由エネルギーへの two-loop の寄与は

$$\frac{F_2}{V} = \frac{\lambda}{4!N}\left(\frac{N}{\beta}\sum_n \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3}\frac{1}{\mathbf{k}^2+\omega_n^2+m_2^2}\right)^2 \tag{148}$$

高温では

$$\frac{F_2}{V} = \frac{N\lambda}{2(12)^3}T^4 \tag{149}$$

λ の 1 次は実際どうなっているか？　次のものを計算すればよい。

$$\frac{\lambda}{4!N}\frac{\delta^2}{\delta J_a^2}\frac{\delta^2}{\delta J_b^2}\left[\frac{1}{2!}\left(\frac{1}{2}J_c G_{cd} J_d\right)^2\right] \tag{150}$$

計算すると

$$\frac{\lambda}{4!N}\left[(G_{aa})^2 + 2G_{ab}G_{ba}\right] \tag{151}$$

である。$O(N)$ モデルで N が大きいときはこの第 1 項が効き，(148) を導く。

なんとなれば，

$$G_{ab} = \frac{\bar\phi_a\bar\phi_b}{\bar\phi_c\bar\phi_c}G(m_1^2) + \left(\delta_{ab} - \frac{\bar\phi_a\bar\phi_b}{\bar\phi_c\bar\phi_c}\right)G(m_2^2) \tag{152}$$

なので。

なお，$N=1$ では (138) が得られる。

[8] 古典場を含むもの

9.4.3 higher-loop と自己無撞着

loop が増えていくと様々な $O(N)$ のオーダーのグラフが現れるが，高温ではデージータイプのダイアグラムが支配的である。それは

$$\frac{1}{\beta}\sum_n \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3}\frac{1}{\mathbf{k}^2+\omega_n^2+m_2^2} \propto T^2 \tag{153}$$

なので。このとき有限温度における $(mass)^2$ を

$$m^2(T) = m^2 + \frac{\lambda}{6} I_T(m(T)) \tag{154}$$

と考えることができる。ここで

$$I_T(m(T)) = \frac{1}{\beta}\sum_n \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3}\frac{1}{\mathbf{k}^2+\omega_n^2+m(T)^2} \tag{155}$$

ただし，零度の発散は繰り込む。高温では

$$m^2(T) = m^2 + \frac{\lambda}{6}\left(\frac{T^2}{12} - \frac{m(T)T}{4\pi} + \cdots\right) \tag{156}$$

$m^2 \approx 0$ のとき，ここまでの近似で解くと

$$m^2(T) \approx T^2\left[\frac{\lambda}{72} - \frac{\lambda^{3/2}}{144\sqrt{2}\pi} + \frac{\lambda^2}{2(24)^2\pi^2} + O(\lambda^{5/2})\right] \tag{157}$$

9.4.4 補助場

ラグランジアン密度 (140) を次のようなものに置き換えてみる。

$$\mathcal{L} \to \mathcal{L} + \frac{N}{2g}\left(\sigma - \frac{g}{2N}\phi_a\phi_a\right)^2 \tag{158}$$

ただしここで $g \equiv \lambda/3$ とする。ラグランジアン密度は ϕ_a については 2 次で表せて

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\partial_\mu\phi_a\partial^\mu\phi_a - \frac{1}{2}m^2\phi_a\phi_a + \frac{N}{2g}\sigma^2 - \frac{1}{2}\sigma\phi_a\phi_a \tag{159}$$

のようになる。

このとき one-loop までで自由エネルギーは

$$\frac{F}{V} = -\frac{N}{2g}\sigma^2 + \frac{N}{2\beta}\sum_n \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3}\ln(\mathbf{k}^2+\omega_n^2+m^2+\sigma) \tag{160}$$

これを最小にする，あるいは運動方程式として

$$-\frac{\langle\sigma\rangle}{g}+\frac{1}{2}I_T(m^2+\langle\sigma\rangle)=0 \tag{161}$$

を満たす $\langle\sigma\rangle$ を求める。

さて補助場の大きさは

$$\langle\sigma\rangle=\frac{\lambda}{6N}\langle\phi_a\phi_a\rangle=\frac{\lambda}{6}I_T(m^2+\langle\sigma\rangle) \tag{162}$$

を意味するから，先に考えた式で $m^2(T)=m^2+\langle\sigma\rangle$ としたことと全く同等である。

通常の定積分においても，補助場の方法は（Large N の場合）有効である。[9]

10 Propagator: Reloaded

10.1 実空間グリーン関数

（平坦な）d 次元空間において，

$$G_C(\mathbf{x};\mathbf{x}';\sigma)=\frac{\mu^d}{(4\pi\sigma)^{d/2}}e^{-\frac{\mu^2}{4\sigma}(\mathbf{x}-\mathbf{x}')^2-\frac{M^2\sigma}{\mu^2}} \tag{163}$$

は以下を満たすことが確かめられる。

$$\frac{\partial}{\partial\sigma}G_C(\mathbf{x};\mathbf{x}';\sigma)=-(-\nabla^2+M^2)G_C(\mathbf{x};\mathbf{x}';\sigma) \tag{164}$$

$$G_C(\mathbf{x};\mathbf{x}';0)=\delta^d(\mathbf{x}-\mathbf{x}') \tag{165}$$

ただし，μ は質量の次元を持つ mass scale とする。

したがって，ユークリッド時空における，τ が周期 β の条件を満たすグリーン関数は

$$\begin{aligned}&G_B(\tau,\mathbf{x};\tau',\mathbf{x}';\sigma)\\ =\;&\frac{\mu^d}{\beta(4\pi\sigma)^{d/2}}e^{-\frac{\mu^2}{4\sigma}(\mathbf{x}-\mathbf{x}')^2-\frac{M^2\sigma}{\mu^2}}\sum_n e^{-\frac{4\pi^2n^2}{\mu^2\beta^2}\sigma+2\pi in(\tau-\tau')/\beta}\end{aligned} \tag{166}$$

を「モヂュライ」σ で積分したものである。

[9] 私のサイトに関連した Mathematica Notebook が置いてある。

10.2 ゼータ関数と高温展開

ゼータ関数は，

$$\begin{aligned}\zeta(s) &= \frac{1}{\Gamma(s)}\int_0^\infty d\sigma\,\sigma^{s-1}\int_0^\beta d\tau\int d^d\mathbf{x}\,G_B(\tau,\mathbf{x};\tau,\mathbf{x};\sigma) \\ &= \frac{1}{\Gamma(s)}\int_0^\infty d\sigma\,\sigma^{s-1}\frac{V\mu^d}{(4\pi\sigma)^{d/2}}\,e^{-\frac{M^2\sigma}{\mu^2}}\sum_n e^{-\frac{4\pi^2n^2}{\mu^2\beta^2}\sigma} \qquad (167)\end{aligned}$$

で与えられる。

ほぐしていくと

$$\begin{aligned}\zeta(s) &= \frac{V\mu^d}{\Gamma(s)(4\pi)^{d/2}}\int_0^\infty d\sigma\,\sigma^{s-d/2-1}\,e^{-\frac{M^2\sigma}{\mu^2}} \\ &+ \frac{2V\mu^d}{\Gamma(s)(4\pi)^{d/2}}\int_0^\infty d\sigma\,\sigma^{s-d/2-1}\sum_{p=0}^\infty\frac{(-M^2\sigma/\mu^2)^p}{p!}\sum_{n=1}^\infty e^{-\frac{4\pi^2n^2}{\mu^2\beta^2}\sigma} \qquad (168)\end{aligned}$$

そして積分して

$$\begin{aligned}\zeta(s) &= \frac{V\mu^d}{\Gamma(s)(4\pi)^{d/2}}\left(\frac{M}{\mu}\right)^{d-2s}\Gamma(s-d/2) \\ &+ \frac{2V\mu^{2s}}{\Gamma(s)(4\pi)^{d/2}}\left(\frac{2\pi}{\beta}\right)^{d-2s} \\ &\times \sum_{p=0}^\infty\frac{(-1)^p}{p!}\left(\frac{\beta M}{2\pi}\right)^{2p}\Gamma(p+s-d/2)\zeta_R(2s+2p-d) \qquad (169)\end{aligned}$$

そこで $d=3$ を入れると

$$\begin{aligned}\zeta(s) &= \frac{V\mu^3}{\Gamma(s)(4\pi)^{3/2}}\left(\frac{M}{\mu}\right)^{3-2s}\Gamma(s-3/2) \\ &+ \frac{2V\mu^{2s}}{\Gamma(s)(4\pi)^{3/2}}\left(\frac{2\pi}{\beta}\right)^{3-2s} \\ &\times \sum_{p=0}^\infty\frac{(-1)^p}{p!}\left(\frac{\beta M}{2\pi}\right)^{2p}\Gamma(p+s-3/2)\zeta_R(2s+2p-3) \qquad (170)\end{aligned}$$

$\Gamma(s)\sim 1/s$ なので，$\zeta'(0)$ は残りの因子が $s=0$ で有限である項は直ぐに求められる。第 1 項目と，級数部分 $p=0,1$ までの $\zeta'(0)$ への寄与は

$$\frac{V\mu^3}{(4\pi)^{3/2}}\left(\frac{M}{\mu}\right)^3\Gamma(-3/2)$$

$$
\begin{aligned}
&+ \quad \frac{2V}{(4\pi)^{3/2}}\left(\frac{4\pi^2}{\beta^2}\right)^{3/2}\left[\Gamma(-3/2)\zeta_R(-3)-\left(\frac{\beta^2M^2}{4\pi^2}\right)\Gamma(-1/2)\zeta_R(-1)\right] \\
&= \quad \frac{VM^3}{6\pi}+\frac{V\pi^2}{\beta^3}\left[\frac{1}{45}-\frac{\beta^2M^2}{12\pi^2}\right] \\
&= \quad V\left[\frac{M^3}{6\pi}+\frac{\pi^2}{45\beta^3}-\frac{M^2}{12\beta}\right] \qquad (171)
\end{aligned}
$$

級数部分 $p=3$ 以上の $\zeta'(0)$ への寄与は

$$
\frac{2V}{(4\pi)^{3/2}}\frac{8\pi^3}{\beta^3}\sum_{p=3}^{\infty}\frac{(-1)^p}{p!}\left(\frac{\beta^2M^2}{4\pi^2}\right)^p\Gamma(p-3/2)\zeta_R(2p-3) \qquad (172)
$$

級数部分 $p=2$ の $\zeta'(0)$ への寄与が問題。$\zeta(s)$ のこの部分は

$$
\begin{aligned}
&\frac{V\mu^{2s}}{\Gamma(s)(4\pi)^{3/2}}\left(\frac{4\pi^2}{\beta^2}\right)^{3/2-s}\frac{\beta^4M^4}{16\pi^4}\Gamma(s+1/2)\zeta_R(2s+1) \\
&= \frac{V\beta M^4}{\Gamma(s)16\pi^2\pi^{1/2}}\left(\frac{\beta^2\mu^2}{4\pi^2}\right)^s\Gamma(s+1/2)\zeta_R(2s+1) \qquad (173)
\end{aligned}
$$

さらに相反公式 (324) および

$$
\begin{aligned}
\Gamma(z) &= \frac{1}{z}-\gamma_E+O(z)\,, \quad \zeta_R(z)=-\frac{1}{2}-z\ln\sqrt{2\pi}+O(z^2)\,, \\
a^s &= 1+s\ln a+O(s^2) \qquad (174)
\end{aligned}
$$

により

$$
=\frac{V\beta M^4}{32\pi^2}\left[1+2s\left(\ln\frac{\beta\mu}{4\pi}+\gamma_E\right)+O(s^2)\right] \qquad (175)
$$

となる。したがってこの部分の $\zeta'(0)$ への寄与は

$$
\frac{V\beta M^4}{16\pi^2}\left(\ln\frac{\beta\mu}{4\pi}+\gamma_E\right) \qquad (176)
$$

以上をまとめれば任意の精度の高温展開が可能である。

11 間奏曲：ハゲドルン温度

superstring (in 10 dimensions) では，次の generating function で質量分布関数が求められる。

$$
16\prod_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1+q^n}{1-q^n}\right)^8=\sum d_nq^n \qquad (177)
$$

粒子状態の質量 M は $\sqrt{n}$ に比例する。

$$\prod_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1+q^n}{1-q^n}\right)^{-1}=\vartheta_4(q)=\left(-\frac{\ln q}{\pi}\right)^{-1/2}\vartheta_2(e^{\pi/\ln q}) \tag{178}$$

を用いると

$$G(q)=\prod_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1+q^n}{1-q^n}\right)^{8}\sim\exp\left(-\frac{2\pi^2}{\ln q}\right) \tag{179}$$

$$d_n=\frac{1}{2\pi i}\oint\frac{G(q)}{q^{n+1}}dq \tag{180}$$

により d_n を求める。

被積分関数は（大きな n について，$n+1\sim n$）

$$\begin{aligned}&\exp\left[-\frac{2\pi^2}{\ln q}-n\ln q\right]\\ =\ &\exp\left[-\left(\sqrt{\frac{2\pi^2}{\ln q}}+\sqrt{n\ln q}\right)^2+2\pi\sqrt{2n}\right]\end{aligned} \tag{181}$$

を含むので，saddle point で評価すると

$$d_n\sim\exp\left(2\pi\sqrt{2n}\right) \tag{182}$$

より詳しくは [12]

$$d_n\sim n^{-11/4}\exp\left(2\pi\sqrt{2n}\right) \tag{183}$$

従って質量分布関数は

$$\rho(M)\sim M^{-9/2}\exp\left(\beta_0 M\right)\,,\quad \beta_0\equiv\pi\sqrt{8\alpha'} \tag{184}$$

種々の熱力学的関数は

$$\sim\int_0^\infty dM\,\rho(M)\,e^{-\beta M} \tag{185}$$

で表される。この積分は $\beta\leq\beta_0$ では発散する。

すなわち，カノニカルな統計力学を考えると，温度の最大値が存在し

$$T_{max}=\frac{1}{\beta_0}=\frac{1}{\pi\sqrt{8\alpha'}} \tag{186}$$

である。これを Hagedorn 温度と呼ぶ。

単純なストリングのシナリオでは，やはりこれはプランク質量程度の値になる。

12　大分配関数

12.1　大分配関数

系に含まれる粒子数も扱いたいときには，大分配関数を考える。
大分配関数は

$$Z(\beta, \mu) = \mathrm{Tr}\ e^{-\beta(H-\mu N)} \tag{187}$$

と書かれ，N は粒子数（演算子），μ は化学ポテンシャルである。
また

$$Z = e^{-\beta\Omega} \tag{188}$$

$\Omega(\beta, \mu)$ は熱力学関数である。
系の粒子数密度は

$$n = -\frac{1}{V}\frac{\partial\Omega}{\partial\mu} \tag{189}$$

で与えられる。

12.2　非相対論的自由粒子系

ご参考までに …

12.2.1　Bose 粒子

$$\Omega = \frac{V}{\beta}\int\frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3}\ln(1 - e^{\beta(\mu-\mathbf{k}^2/(2m))}) \tag{190}$$

12.2.2　Fermi 粒子

$$\Omega = -\frac{V}{\beta}\int\frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3}\ln(1 + e^{\beta(\mu-\mathbf{k}^2/(2m))}) \tag{191}$$

12.3　相対論的粒子系を扱う際の注意

エネルギーを相対論的なものに置き換える … 化学ポテンシャルの「値」も変わってくる … 他に，重要なのは反粒子が必ず付随してくることであ

る。反粒子の（相対論的）化学ポテンシャルは，粒子のものと大きさは同じで反対符号である。

したがって光子などは$\mu = 0$。そもそも数は保存しないので分配関数で物事を考えるとして差し支えない。

12.3.1　複素スカラー

複素スカラーの場合，

$$\Omega = \frac{V}{\beta}\int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3}\left[\ln(1 - e^{-\beta(\sqrt{\mathbf{k}^2+m^2}-\mu)}) + \ln(1 - e^{-\beta(\sqrt{\mathbf{k}^2+m^2}+\mu)})\right] \tag{192}$$

となるはずである。$\mu = 0$の場合実スカラーの自由エネルギーのちょうど２倍となる。

粒子数密度は

$$n = \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3}\left[\frac{1}{e^{\beta(\sqrt{\mathbf{k}^2+m^2}-\mu)} - 1} - \frac{1}{e^{\beta(\sqrt{\mathbf{k}^2+m^2}+\mu)} - 1}\right] \tag{193}$$

さらなる計算は次節で。

12.3.2　電子

電子の場合，

$$\Omega = -2\frac{V}{\beta}\int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3}\left[\ln(1 + e^{-\beta(\sqrt{\mathbf{k}^2+m^2}-\mu)}) + \ln(1 + e^{-\beta(\sqrt{\mathbf{k}^2+m^2}+\mu)})\right] \tag{194}$$

となるはずである。電子，陽電子，各スピン自由度 2 が考慮されている。

粒子数密度は

$$n = 2\int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3}\left[\frac{1}{e^{\beta(\sqrt{\mathbf{k}^2+m^2}-\mu)} + 1} - \frac{1}{e^{\beta(\sqrt{\mathbf{k}^2+m^2}+\mu)} + 1}\right] \tag{195}$$

さらなる計算は次節で。

12.4　複素スカラー熱場の理論

質量mの複素スカラー場の従う（ミンコフスキー）ラグランジアン密度は

$$\mathcal{L} = \partial_\mu\varphi\partial^\mu\varphi^* - m^2\varphi\varphi^* \tag{196}$$

これは大局的 $U(1)$ 対称性を持つ（位相不変性）。それに対する保存カレントは

$$j_\mu = i(\varphi^* \partial_\mu \varphi - \varphi \partial_\mu \varphi^*) \tag{197}$$

であるから保存量は

$$N = \int d^3\mathbf{x}\, j^0 \tag{198}$$

で表される。 N で表したが，実際，これは粒子数演算子である。「粒子・反粒子」の言葉遣いで言えば,（粒子数）−（反粒子数）となるものである。

場を

$$\varphi = \frac{\varphi_1 + i\varphi_2}{\sqrt{2}} \tag{199}$$

のように 2 つの実スカラー場で表せば，以前と同様に経路積分で取り扱う事ができる。すなわち

$$Z(\beta,\mu) = \int \mathcal{D}\pi_1 \mathcal{D}\pi_2 \int \mathcal{D}\varphi_1 \mathcal{D}\varphi_2\, e^{\int_0^\beta d\tau \int d^3\mathbf{x}\, [i\pi_1 \dot{\varphi}_1 + i\pi_2 \dot{\varphi}_2 - \mathcal{H} + \mu \mathcal{N}]} \tag{200}$$

ここで

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2}[\pi_1^2 + \pi_2^2 + (\nabla\varphi_1)^2 + (\nabla\varphi_2)^2 + m^2(\varphi_1^2 + \varphi_2^2)] \tag{201}$$

$$\mathcal{N} = \varphi_2 \pi_1 - \varphi_1 \pi_2 \tag{202}$$

π_1, π_2 について積分してやり，再び纏め直せば

$$Z = \int \mathcal{D}\varphi \mathcal{D}\varphi^* e^{-\int_0^\beta d\tau \int d^3\mathbf{x} \varphi^* \left[-\left(\frac{\partial}{\partial\tau} - \mu\right)^2 - \nabla^2 + m^2\right]\varphi} \tag{203}$$

結局変更点は

$$\omega_n \to \omega_n - i\mu \tag{204}$$

$U(1)$ ゲージ場を導入し，その 0 成分 A_0 を $i\mu$ と置き換えたことと等価である。

練習問題：前々節最後の計算では，複素場にし，化学ポテンシャルを入れると

$$K_{2-s}(\beta m n) \to 2K_{2-s}(\beta m n)\cosh(\beta\mu n) \tag{205}$$

という置き換えで対応できることを示せ。

13　フェルミオンの縮退とボソンの凝縮

13.1　電子の縮退

電子の場合，

$$\Omega = -\frac{2V}{\beta}\int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3}\left[\ln(1+e^{-\beta(\sqrt{\mathbf{k}^2+m^2}-\mu)}) + \ln(1+e^{-\beta(\sqrt{\mathbf{k}^2+m^2}+\mu)})\right] \tag{206}$$

である。電子，陽電子，各スピン自由度 2 が考慮されている。

13.1.1　高温展開

高温，粒子の質量が無視できる場合。

$$\begin{aligned}\Omega &= -2\frac{V}{\beta}\int_0^\infty \frac{4\pi k^2 dk}{(2\pi)^3}\left[\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}e^{-\beta n(k-\mu)}}{n} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}e^{-\beta n(k+\mu)}}{n}\right] \\ &= -2\frac{V}{\beta^4}\frac{\Gamma(3)}{2\pi^2}\left[\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}e^{\beta n\mu}}{n^4} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}e^{-\beta n\mu}}{n^4}\right] \\ &= -4\frac{V}{\pi^2\beta^4}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}\cosh\beta\mu n}{n^4} \end{aligned} \tag{207}$$

公式

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{\cosh\beta\mu n}{n^4} = \frac{7\pi^4}{720} + \frac{\pi^2\beta^2\mu^2}{24} + \frac{\beta^4\mu^4}{48} \tag{208}$$

を使うと

$$\begin{aligned}\frac{\Omega}{V} &= -\frac{4}{\pi^2\beta^4}\left[\frac{7\pi^4}{720} + \frac{\pi^2\beta^2\mu^2}{24} + \frac{\beta^4\mu^4}{48}\right] \\ &= -\frac{1}{6}\left[\frac{7\pi^2}{30}T^4 + \mu^2 T^2 + \frac{\mu^4}{2\pi^2}\right]\end{aligned} \tag{209}$$

これより，圧力は

$$P = \frac{1}{6}\left[\frac{7\pi^2}{30}T^4 + \mu^2 T^2 + \frac{\mu^4}{2\pi^2}\right] \tag{210}$$

エントロピー密度は

$$s \equiv \frac{S}{V} = -\frac{\partial\Omega}{\partial T} = \frac{1}{6}\left[\frac{28\pi^2}{30}T^3 + 2\mu^2 T\right] \tag{211}$$

粒子数密度は

$$n = \frac{1}{3}\left[\mu T^2 + \frac{\mu^3}{\pi^2}\right] \tag{212}$$

そしてエネルギー密度は

$$\rho = -P + sT + \mu n = \frac{1}{6}\left[\frac{7\pi^2}{10}T^4 + 3\mu^2 T^2 + \frac{3\mu^4}{2\pi^2}\right] = 3P \tag{213}$$

となることがわかる。

13.1.2　絶対零度

熱力学関数の積分表現を書きかえてみることから始める。まず

$$\Omega = -4\frac{V}{\beta}\int_0^\infty \frac{4\pi k^2 dk}{(2\pi)^3}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\cosh(\beta\mu n)\,\frac{e^{-\beta n\sqrt{k^2+m^2}}}{n} \tag{214}$$

である。

ここにみられる積分

$$I_q = \int_0^\infty k^2 dk\, e^{-\beta n\sqrt{k^2+m^2}} \tag{215}$$

で $k = m\sinh t$ と変数変換する。$\sqrt{k^2+m^2} = m\cosh t$，$dk = m\cosh t\, dt$ なので

$$I_q = m^3\int_0^\infty e^{-\beta mn\cosh t}\sinh^2 t\cosh t\, dt = \frac{\beta m^4 n}{3}\int_0^\infty e^{-\beta mn\cosh t}\sinh^4 t\, dt \tag{216}$$

さらに変数変換して

$$I_q = \frac{\beta m^4 n}{3}\int_1^\infty e^{-\beta mnx}(x^2-1)^{3/2}dx \tag{217}$$

したがって[10]

$$\Omega = -4\frac{Vm^4}{6\pi^2}\int_1^\infty (x^2-1)^{3/2}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\cosh(\beta\mu n)\, e^{-\beta mnx}dx \tag{218}$$

となるが，和を実行すると

$$\Omega = -2\frac{Vm^4}{6\pi^2}\int_1^\infty (x^2-1)^{3/2}\left[\frac{1}{e^{\beta(mx-\mu)}+1} + \frac{1}{e^{\beta(mx+\mu)}+1}\right]dx \tag{219}$$

[10] 無論，はじめから変形ベッセルで書いても書き換えられる。

低温極限では

$$\lim_{\beta\to\infty}\frac{1}{e^{\beta(mx-\mu)}+1}=\theta(\mu/m-x) \tag{220}$$

（$\theta(y)$ は step function）なので[11]，絶対零度では

$$\begin{aligned}\Omega(T=0)=\Omega_0 &= -2\frac{Vm^4}{6\pi^2}\int_1^{\mu/m}(x^2-1)^{3/2}dx \\ &= -2\frac{Vm^4}{6\pi^2}\int_1^{\mu/m}(x^2-1)^{3/2}dx \end{aligned} \tag{221}$$

積分の実行により

$$\Omega_0=-2\frac{Vm^4}{24\pi^2}\left[\frac{\mu}{m}\sqrt{\frac{\mu^2}{m^2}-1}\left(\frac{\mu^2}{m^2}-\frac{5}{2}\right)+\frac{3}{2}\ln\left(\frac{\mu}{m}+\sqrt{\frac{\mu^2}{m^2}-1}\right)\right] \tag{222}$$

を得る。

これより，圧力は

$$P_0=2\frac{m^4}{24\pi^2}\left[\frac{\mu}{m}\sqrt{\frac{\mu^2}{m^2}-1}\left(\frac{\mu^2}{m^2}-\frac{5}{2}\right)+\frac{3}{2}\ln\left(\frac{\mu}{m}+\sqrt{\frac{\mu^2}{m^2}-1}\right)\right] \tag{223}$$

粒子数密度は

$$n_0=2\frac{1}{6\pi^2}(\mu^2-m^2)^{3/2} \tag{224}$$

そしてエネルギー密度は

$$\rho_0=2\frac{\mu}{6\pi^2}(\mu^2-m^2)^{3/2}-P_0 \tag{225}$$

と求められる。

さらに $m\to 0$ とすれば

$$\frac{\Omega}{V}=-\frac{\mu^4}{12\pi^2} \tag{226}$$

となるが，これは「高温展開」で $T\to 0$ としたものに一致。ちなみに

$$P=\frac{\mu^4}{12\pi^2}\,,\quad n=\frac{\mu^3}{3\pi^2}\,,\quad \rho=\frac{\mu^4}{4\pi^2} \tag{227}$$

であるので，

$$\rho\propto n^{4/3}\,,\quad P\propto n^{4/3} \tag{228}$$

である。

[11] 絶対零度付近ではゾンマーフェルト展開を使えば，熱力学量の低温展開 ($T << \mu$) が得られる。

13.1.3　非相対論的縮退

学部授業のように最初から計算すればよいのだが，ここでは相対論的結果から導いてみる。

絶対零度では $\mu_N = \mu - m$ と非相対論的化学ポテンシャルを置けばよいので $\mu \approx m$ の近傍で展開すると密度は

$$n \approx \frac{2\sqrt{2}m^3}{3\pi^2}\left(\frac{\mu}{m} - 1\right)^{3/2} \tag{229}$$

となり，一方非相対論的エネルギー密度は

$$\rho_N \equiv \rho - mn \approx \frac{2\sqrt{2}m^4}{5\pi^2}\left(\frac{\mu}{m} - 1\right)^{5/2} \tag{230}$$

でまた

$$P \approx \frac{4\sqrt{2}m^4}{15\pi^2}\left(\frac{\mu}{m} - 1\right)^{5/2} \tag{231}$$

であるので

$$\rho_N \propto n^{5/3}, \quad P \propto n^{5/3} \tag{232}$$

である。

13.2　複素スカラーの凝縮

13.2.1　相対論的凝縮

複素スカラーの場合，

$$\Omega = \frac{V}{\beta}\int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3}\left[\ln(1 - e^{-\beta(\sqrt{\mathbf{k}^2+m^2}-\mu)}) + \ln(1 - e^{-\beta(\sqrt{\mathbf{k}^2+m^2}+\mu)})\right] \tag{233}$$

なので，粒子数密度は

$$\begin{aligned} n &= \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3}\left[\frac{1}{e^{\beta(\sqrt{\mathbf{k}^2+m^2}-\mu)} - 1} - \frac{1}{e^{\beta(\sqrt{\mathbf{k}^2+m^2}+\mu)} - 1}\right] \\ &= 2\frac{4\pi}{(2\pi)^3}\int_0^\infty k^2 dk \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\beta n\sqrt{\mathbf{k}^2+m^2}} \cosh\beta\mu n \end{aligned} \tag{234}$$

ここに再び現れる積分

$$\begin{aligned} I_q &= \int_0^\infty k^2 dk\, e^{-\beta n\sqrt{k^2+m^2}} \\ &= m^3\int_0^\infty e^{-\beta mn\cosh t}\sinh^2 t\cosh t\, dt \end{aligned} \tag{235}$$

は

$$I_q = m^3 \int_1^\infty e^{-\beta mnx} x\sqrt{x^2-1}\,dx \tag{236}$$

と書き換えられる。低温（$\beta \to 0$）で，n が最大となるのは $\mu = m$ であることは最初の表現からわかる。

$$\begin{aligned} n &= \frac{4\pi m^3}{(2\pi)^3} \int_1^\infty \sum_{n=1}^\infty e^{-\beta mn(x-1)} x\sqrt{x^2-1}\,dx \\ &= \frac{m^3}{2\pi^2} \int_0^\infty \sum_{n=1}^\infty e^{-\beta mny}(y+1)\sqrt{y(y+2)}\,dy \\ &= \frac{1}{2\pi^2\beta^3} \int_0^\infty \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^3} e^{-z}(z+1/(\beta mn))\sqrt{z(z+2/(\beta mn))}\,dz \end{aligned} \tag{237}$$

とさらに書き換えると，低温極限では

$$n \approx \frac{\Gamma(3)}{2\pi^2\beta^3} \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^3} = \frac{\zeta_R(3)}{\pi^2\beta^3} \tag{238}$$

全粒子数 N が一定であるとしたとき，

$$N_0 = N - \frac{V\zeta_R(3)}{\pi^2} T^3 \tag{239}$$

は，ゼロエネルギー状態にあると考えられる（n の最初の積分表現に含まれない）。

温度 $T = T_c$ まで下げたときにこの凝縮が起き始めるとすれば

$$N = \frac{V\zeta_R(3)}{\pi^2} T_c^3 \tag{240}$$

$$\frac{N_0}{N} = 1 - \frac{T^3}{T_c^3} \qquad (T \le T_c) \tag{241}$$

13.2.2 非相対論的凝縮

粒子数密度は最大で（$\mu_R \approx 0$）

$$\begin{aligned} n &= \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3} \frac{1}{e^{\beta \mathbf{k}^2/(2m)} - 1} \\ &= \frac{4\pi}{(2\pi)^3} \int_0^\infty k^2 dk \sum_{n=1}^\infty e^{-\beta nk^2/(2m)} \\ &= \frac{(2m)^{3/2}}{2\pi^2\beta^3} \Gamma\left(\frac{3}{2}\right) \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^{3/2}} \\ &= \frac{(2m)^{3/2}}{4\pi^{3/2}\beta^{3/2}} \zeta_R\left(\frac{3}{2}\right) \end{aligned} \tag{242}$$

となるので，臨界温度 T_c は次を満たす。

$$N = \frac{V(2m)^{3/2}}{4\pi^{3/2}} \zeta_R \left(\frac{3}{2}\right) T_c^{3/2} \tag{243}$$

14 最後に

compactification を含むモデル，Kaluza-Klein 理論，細谷機構などにおける真空エネルギーの計算では，自由場の理論の質量にスペクトルを持たせればよい（Deconstruction も同様）。計算テクニックは，温度がユークリッド時間の周期の逆数で与えられたことからわかるように，同様のものが使える。

カシミア効果の計算も同様。

以上のモデルでは，さらに有限温度の効果を入れるのが容易で，任意次元での振る舞いも面白い。[17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28]

閉じた宇宙における熱力学では，宇宙半径が新たに次元を持つ量として現れてくるので興味深い。[15, 16]

15 Appendix A

15.1 hyperbolic cotangent 公式

公式

$$\coth \pi y = \frac{1}{\pi y} + \frac{2y}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + y^2} \tag{244}$$

について考えよう。（注：極の位置は両辺合ってますね。）

15.2 公式の導出

次の式（Appendix B で証明）から出発する。

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-4\pi^2(n^2+y^2)t} = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \exp\left[-\frac{n^2}{4t} - 4\pi^2 y^2 t\right] \tag{245}$$

両辺積分して

$$\int_0^{\infty} dt \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-4\pi^2(n^2+y^2)t} = \int_0^{\infty} \frac{dt}{2\sqrt{\pi t}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \exp\left[-\frac{n^2}{4t} - 4\pi^2 y^2 t\right] \tag{246}$$

左辺は $\frac{1}{4\pi^2}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{1}{n^2+y^2}$，右辺は変形ベッセル $K_{1/2}$ で表せるが，それを経由しなくても積分できる。

次の積分を考える。

$$I=\frac{1}{2}\int_0^{\infty}dt\,\frac{\alpha}{t^{1/2}}\exp\left[-\left(\alpha t^{1/2}-\beta t^{-1/2}\right)^2\right] \tag{247}$$

ここで $t\to\beta^2/(\alpha^2 t)$ と置き換えると

$$I=\frac{1}{2}\int_0^{\infty}dt\,\frac{\beta}{t^{3/2}}\exp\left[-\left(\alpha t^{1/2}-\beta t^{-1/2}\right)^2\right] \tag{248}$$

足し合わせ，変数変換により

$$\begin{aligned}2I &= \int_0^{\infty}dt\left(\frac{1}{2}\frac{\alpha}{t^{1/2}}+\frac{1}{2}\frac{\beta}{t^{3/2}}\right)\exp\left[-\left(\alpha t^{1/2}-\beta t^{-1/2}\right)^2\right]\\ &= \int_{-\infty}^{\infty}dx\,e^{-x^2}=\sqrt{\pi}\end{aligned} \tag{249}$$

以上のことより

$$\int_0^{\infty}dt\,\frac{1}{t^{1/2}}\exp\left[-\alpha^2 t-\frac{\beta^2}{t}\right]=\frac{\sqrt{\pi}}{\alpha}e^{-2\alpha\beta} \tag{250}$$

そこで

$$\begin{aligned}\int_0^{\infty}dt\,\frac{1}{2\sqrt{\pi t}}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\exp\left[-\frac{n^2}{4t}-4\pi^2y^2t\right] &= \frac{1}{4\pi y}\left[1+2\frac{e^{-2\pi y}}{1-e^{-2\pi y}}\right]\\ &= \frac{1}{4\pi y}\coth\pi y\end{aligned} \tag{251}$$

よって

$$\coth\pi y=\frac{y}{\pi}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{1}{n^2+y^2} \tag{252}$$

ところで

$$\frac{2y}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+y^2}=\coth\pi y-\frac{1}{\pi y} \tag{253}$$

なので偶数のみの和は

$$\begin{aligned}\frac{2y}{\pi}\sum_{n=2,4,\ldots}^{\infty}\frac{1}{n^2+y^2} &= \frac{2y}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4n^2+y^2}\\ &= \frac{1}{2}\frac{2(y/2)}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+(y/2)^2}\\ &= \frac{1}{2}\coth(\pi y/2)-\frac{1}{\pi y}\end{aligned} \tag{254}$$

一方奇数のみの和は

$$\begin{aligned}\frac{2y}{\pi}\sum_{n=1,3,\dots}^{\infty}\frac{1}{n^2+y^2} &= \left[\coth\pi y-\frac{1}{\pi y}\right]-\left[\frac{1}{2}\coth(\pi y/2)-\frac{1}{\pi y}\right]\\ &= \coth\pi y-\frac{1}{2}\coth(\pi y/2)\\ &= \frac{\cosh\pi y-\cosh^2(\pi y/2)}{\sinh\pi y}=\frac{\sinh^2(\pi y/2)}{\sinh\pi y}\\ &= \frac{1}{2}\tanh(\pi y/2) \qquad (255)\end{aligned}$$

書き換えると

$$\frac{2y}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2+y^2}=\frac{1}{2}\tanh(\pi y/2) \qquad (256)$$

である。$y\to 2y$ とすると

$$\frac{4y}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2+4y^2}=\frac{1}{2}\tanh(\pi y) \qquad (257)$$

なので

$$\frac{y}{\pi}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{1}{(n+1/2)^2+y^2}=\tanh(\pi y) \qquad (258)$$

総まとめ：

$$\begin{aligned}\frac{y}{\pi}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{1}{n^2+y^2} &= \coth\pi y=1+\frac{2}{e^{2\pi y}-1} \qquad (259)\\ \frac{y}{\pi}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{1}{(n+1/2)^2+y^2} &= \tanh\pi y=1-\frac{2}{e^{2\pi y}+1} \qquad (260)\end{aligned}$$

15.3 よく見る無限乗積

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{y}{n^2+y^2}=\pi\coth\pi y \qquad (261)$$

辺々 y で積分すると

$$\frac{1}{2}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\ln(n^2+y^2)=\ln\sinh\pi y+C \qquad (262)$$

ここで C は積分定数。変形して

$$\frac{1}{2}\ln\prod_{n=-\infty}^{\infty}(n^2+y^2)=\ln\sinh\pi y+C \tag{263}$$

さらに

$$\prod_{n=-\infty}^{\infty}\sqrt{n^2+y^2}=C'\sinh\pi y \tag{264}$$

まとめ直して

$$y\prod_{n=1}^{\infty}(n^2+y^2)=C'\sinh\pi y \tag{265}$$

がわかる。

y をゼロとおくと

$$\prod_{n=1}^{\infty}(n^2)=C'\pi \tag{266}$$

であるから，辺々割ってやると

$$\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{y^2}{n^2}\right)=\frac{\sinh\pi y}{\pi y} \tag{267}$$

を得る。

変数を虚にしてやれば

$$\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{y^2}{n^2}\right)=\frac{\sin\pi y}{\pi y} \tag{268}$$

を得る。

なお，各辺を y で展開し，各次数の係数を比べてやれば，（引数が偶数である）リーマンのゼータ関数の値が求められる。

15.4 リーマンゼータのゼロにおける微分係数

(268) において，$y=1/2$ とすると

$$\frac{2}{\pi}=\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{1}{4n^2}\right)=\frac{\prod_{n=1}^{\infty}(4n^2-1)}{\prod_{n=1}^{\infty}(4n^2)} \tag{269}$$

ここで

$$\prod_{n=1}^{\infty}\left(4n^2-1\right)=\prod_{n=1}^{\infty}(2n-1)\prod_{n=1}^{\infty}(2n+1)=\left(\prod_{n=1}^{\infty}(2n-1)\right)^2 \tag{270}$$

また

$$\prod_{n=1}^{\infty}(2n-1)\prod_{n=1}^{\infty}(2n)=\prod_{n=1}^{\infty}n \tag{271}$$

なので

$$\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}}=\frac{\prod_{n=1}^{\infty}(2n-1)}{\prod_{n=1}^{\infty}(2n)}=\frac{\prod_{n=1}^{\infty}n}{\prod_{n=1}^{\infty}(2n)^2}=\frac{1}{\prod_{n=1}^{\infty}4n} \tag{272}$$

すなわち

$$\prod_{n=1}^{\infty}4n=\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{2}} \tag{273}$$

両辺の対数をとると

$$\ln\prod_{n=1}^{\infty}4n=\frac{1}{2}\ln\frac{\pi}{2} \tag{274}$$

すなわち

$$\sum_{n=1}^{\infty}\ln(4n)=\frac{1}{2}\ln\frac{\pi}{2} \tag{275}$$

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty}\ln(4n) &= \sum_{n=1}^{\infty}\ln n+\sum_{n=1}^{\infty}\ln 4\\ &= \sum_{n=1}^{\infty}\ln n+2\ln 2\sum_{n=1}^{\infty}1=\sum_{n=1}^{\infty}\ln n-\ln 2\end{aligned} \tag{276}$$

（最後は $\zeta_R(0)=-1/2$ を用いた）なので

$$\sum_{n=1}^{\infty}\ln n=\frac{1}{2}\ln(2\pi) \tag{277}$$

であることがわかる。

一方

$$\zeta_R'(s)=\frac{\partial}{\partial s}\sum_{n=1}^{\infty}n^{-s}=-\sum_{n=1}^{\infty}n^{-s}\ln n \tag{278}$$

から

$$\zeta_R'(0)=-\sum_{n=1}^{\infty}\ln n=-\frac{1}{2}\ln(2\pi) \tag{279}$$

となる。[12]

[12] 結局，$\prod_{n=1}^{\infty}n^{\alpha}=(2\pi)^{\alpha/2}$，$\prod_{n=1}^{\infty}a=a^{-1/2}$。

16　Appendix B

16.1　拡散方程式（熱伝導方程式）から

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{280}$$

を満たす $u(x,t)$ で

$$\lim_{t\to+0} u(x,t) = f(x) \quad \text{（初期条件）} \tag{281}$$

（$f(x)$：周期 1，区分的滑らかな関数）を満たすものを見いだす。

16.1.1　フーリエ級数を使う

$$u(x,t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-4\pi^2 n^2 t} g_n(x), \tag{282}$$

$$g_n(x) = A_n \cos(2\pi n x) + B_n \sin(2\pi n x) \tag{283}$$

と書ける。さらに

$$g_n(x) = \int_0^1 f(\alpha)\cos[2\pi n(x-\alpha)]d\alpha \tag{284}$$

と表せる。

16.1.2　“グリーン関数”を使う

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right) G(x,t) = 0, \tag{285}$$

$$\lim_{t\to+0} G(x,t) = \delta(x) \tag{286}$$

となる $G(x,t)$ を用いて

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_0^1 f(n+\alpha) G(x-\alpha,t) d\alpha \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_0^1 f(\alpha) G(x+n-\alpha,t) d\alpha \end{aligned} \tag{287}$$

と表せる。

さて，このような $G(x,t)$ は

$$G(x,t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \exp\left[-\frac{x^2}{4t}\right] \tag{288}$$

と表されることは直ぐに確かめられる。

16.2　ヤコビの反転公式

以上のことから，

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-4\pi^2 n^2 t} \cos(2\pi n x) = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \exp\left[-\frac{(x-n)^2}{4t}\right] \tag{289}$$

という関係式が求まる。

問題：

$$\vartheta_3(v|\tau) \equiv \sum_{n=-\infty}^{\infty} \exp(i\pi\tau n^2 + 2\pi i v n) \tag{290}$$

という関数についてはどんな関係式が書けるか?　他の ϑ 関数については?

16.3　付録：解の一意性

拡散方程式の解がいくつか求まったとすると，それらの差 u も同じ方程式

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (t > 0) \tag{291}$$

をみたす。

これに u をかけたもの

$$u\frac{\partial u}{\partial t} - u\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \tag{292}$$

を積分すると，

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_0^1 u^2 dx \quad & - \quad \left[u\frac{\partial u}{\partial x}\right]_{x=0}^{x=1} + \int_0^1 \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 dx \\
& = \quad \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_0^1 u^2 dx + \int_0^1 \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 dx = 0 \\
& \Rightarrow \quad \frac{d}{dt}\int_0^1 u^2 dx \le 0 \qquad (293)
\end{aligned}$$

したがって，$t=0$ で $u\equiv 0$ ならば

$$t=0 \qquad \int_0^1 u^2dx=0 \quad \to \quad t>0 \qquad u\equiv 0 \tag{294}$$

ゆえに，初期条件を決めたとき，拡散方程式の解は一意。

17 Appendix C

17.1 ベルヌイ多項式など

コサインの展開

$$\cos 2\pi nt=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k(2\pi nt)^k}{(2k)!} \tag{295}$$

で，項別に級数を考える。ただし 1 周期 $-\frac{1}{2}\leq t\leq\frac{1}{2}$ で考えると

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{\cos 2\pi nt}{n^4} &= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^4}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k(2\pi nt)^k}{(2k)!}\\
&= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k(2\pi t)^{2k}}{(2k)!}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^{4-2k}}\\
&= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k(2\pi t)^{2k}}{(2k)!}\eta_R(4-2k)\\
&= \sum_{k=0}^{2}\frac{(-1)^k(2\pi t)^{2k}}{(2k)!}\eta_R(4-2k)\\
&= \eta_R(4)-\frac{(2\pi t)^2}{2}\eta_R(2)+\frac{(2\pi t)^4}{24}\eta_R(0)\\
&= \frac{7\pi^4}{720}-\frac{(2\pi t)^2}{2}\frac{\pi^2}{12}+\frac{(2\pi t)^4}{24}\frac{1}{2}\\
&= \frac{7\pi^4}{720}-\frac{\pi^4t^2}{6}+\frac{\pi^4t^4}{3}\\
&= \frac{\pi^4}{48}\left[\frac{7}{15}-8t^2+16t^4\right] \qquad (296)
\end{aligned}$$

したがって

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{\cos 2\pi nt}{n^4}=\frac{\pi^4}{48}\left[\frac{7}{15}-8t^2+16t^4\right], \quad -\frac{1}{2}\leq t\leq\frac{1}{2} \tag{297}$$

次に $t \to t-1/2$ と置き換えると

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{\cos 2\pi n(t-1/2)}{n^4} = -\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos 2\pi nt}{n^4}, \quad 0 \le t \le 1 \tag{298}$$

なので

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos 2\pi nt}{n^4} &= -\frac{\pi^4}{48}\left[\frac{7}{15} - 8(t-1/2)^2 + 16(t-1/2)^4\right] \\ &= \frac{\pi^4}{3}\left[\frac{1}{30} - t^2 + 2t^3 - t^4\right] \end{aligned}\tag{299}$$

($t=0$ とすると $\zeta_R(4) = \frac{\pi^4}{90}$ が求まる)

17.2 有限密度で使う公式

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{\cosh \beta\mu n}{n^4} &= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^4}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(\beta\mu n)^k}{(2k)!} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(\beta\mu)^{2k}}{(2k)!}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^{4-2k}} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(\beta\mu)^{2k}}{(2k)!}\eta_R(4-2k) \\ &= \sum_{k=0}^{2}\frac{(\beta\mu)^{2k}}{(2k)!}\eta_R(4-2k) \\ &= \eta_R(4) + \frac{(\beta\mu)^2}{2}\eta_R(2) + \frac{(\beta\mu)^4}{24}\eta_R(0) \\ &= \frac{7\pi^4}{720} + \frac{(\beta\mu)^2}{2}\frac{\pi^2}{12} + \frac{(\beta\mu)^4}{24}\frac{1}{2} \\ &= \frac{7\pi^4}{720} + \frac{\pi^2\beta^2\mu^2}{24} + \frac{\beta^4\mu^4}{48} \end{aligned}\tag{300}$$

18 Appendix D

18.1 ガンマ関数

$$\Gamma(s) = \int_0^{\infty} dx\, x^{s-1}\, e^{-x} \tag{301}$$

ガンマ関数の性質：

$$\Gamma(s+1) = s\Gamma(s) \tag{302}$$

特別な値：

$$\Gamma\left(1\right) = 1,, \qquad \Gamma\left(n+1\right) = n! \quad (n \text{ は整数}) \tag{303}$$

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}\,, \quad \Gamma\left(-\frac{1}{2}\right) = -2\sqrt{\pi}\,, \quad \Gamma\left(-\frac{3}{2}\right) = \frac{4}{3}\sqrt{\pi} \tag{304}$$

定積分への応用：

$$\begin{aligned}\int_0^\infty \frac{t^{p-1}}{(1+t)^{p+q}}dt &= \int_0^\infty t^{p-1}\left\{\frac{1}{\Gamma(p+q)}\int_0^\infty s^{p+q-1}\,e^{-s(t+1)}ds\right\}dt \\ &= \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)} \\ &= \int_0^1 y^{q-1}(1-y)^{p-1}dy\end{aligned} \tag{305}$$

$$\int_0^\infty \frac{t^{k-1}}{(t^2+z^2)^\nu}dt = \frac{\Gamma(k/2)\Gamma(\nu-k/2)}{2\Gamma(\nu)}z^{k-2\nu} \tag{306}$$

$$\Gamma(z) = \lim_{n\to\infty}\frac{n^z n!}{\prod_{k=0}^n(z+k)} \tag{307}$$

と表すこともできる。性質 (302) や $\Gamma(1) = 1$ はすぐに確かめられる。この表現から

$$\frac{d}{dz}\ln\Gamma(z) = \lim_{n\to\infty}\left[\ln n - \sum_{k=0}^n \frac{1}{z+k}\right] \tag{308}$$

であることがわかり，すなわち

$$\Gamma'(1) = \lim_{n\to\infty}\left[\ln n - \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}\right] \equiv -\gamma_E \tag{309}$$

である。ここで γ_E はオイラー・マスケローニの定数。

したがって $\Gamma(1+s) = s\Gamma(s) = 1 - s\gamma_E + \cdots$，つまり

$$\Gamma(s) \sim \frac{1}{s} - \gamma_E \tag{310}$$

18.2 リーマンのゼータ関数

$$\zeta_R(s) = \frac{1}{\Gamma(s)}\int_0^\infty dx\,\frac{x^{s-1}}{e^x-1} = \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^s} \tag{311}$$

積分表示は e^{-nx} で展開すれば最右辺との一致が確かめられる。
また次は便利な恒等式で

$$\frac{1}{e^{2x}-1} = \frac{1}{(e^x-1)(e^x+1)} = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{e^x-1} - \frac{1}{e^x+1}\right] \tag{312}$$

これを使うと

$$\begin{aligned}\zeta_R(s) &= \frac{1}{(1-2^{1-s})\Gamma(s)}\int_0^\infty dx\,\frac{x^{s-1}}{e^x+1} \\ &= \frac{1}{(1-2^{1-s})}\sum_{n=1}^\infty \frac{(-1)^{n-1}}{n^s} \equiv \frac{1}{(1-2^{1-s})}\,\eta_R(s)\end{aligned} \tag{313}$$

よく使う値は

$$\zeta_R(2) = \frac{\pi^2}{6}, \quad \zeta_R(4) = \frac{\pi^4}{90} \tag{314}$$

それと

$$\zeta_R(0) = -\frac{1}{2}, \quad \zeta_R(-2n) = 0 \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots) \tag{315}$$

$$\eta_R(2) = \frac{\pi^2}{12}, \quad \eta_R(4) = \frac{7\pi^4}{720} \tag{316}$$

それと

$$\eta_R(0) = \frac{1}{2}, \quad \eta_R(-2n) = 0 \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots) \tag{317}$$

$$\zeta_R(-1) = -\frac{1}{12}, \quad \zeta_R(-3) = \frac{1}{120} \tag{318}$$

$$\zeta_R'(0) = -\ln\sqrt{2\pi} \tag{319}$$

級数展開

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots \tag{320}$$

を使って，負の引数のゼータ関数を「邪道に」に導くことができる。

まず
$$\frac{1}{1+1} = 1 - 1 + 1 - 1 + \cdots \tag{321}$$
ゆえに $\eta_R(0) = 1/2$，$\zeta_R(0) = -1/2$。

また
$$\frac{d}{dx} x \frac{1}{1+x} = \frac{1}{(1+x)^2} = 1 - 2x + 3x^2 - 4x^3 + \cdots \tag{322}$$
より，$\eta_R(-1) = 1/4$，$\zeta_R(-1) = -1/12$。

$$\frac{d}{dx} x \frac{1}{(1+x)^2} = \frac{1}{(1+x)^2} - \frac{2x}{(1+x)^3} = 1 - 2^2 x + 3^2 x^2 - 4^2 x^3 + \cdots \tag{323}$$
より，$\eta_R(-2) = 0$，$\zeta_R(-2) = 0$。

$\zeta_R(-3) = 0$ は演習問題とする。

デュアルな式（相反公式）：
$$\zeta_R(s)\Gamma\left(\frac{s}{2}\right) = \pi^{s-1/2}\zeta_R(1-s)\Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right) \tag{324}$$
これは，(289) の両辺に $t^{s/2-1}e^{-\epsilon t}$ を掛け積分する（原点の特異性は避けるため，収束因子が必要）ことで求められる。

18.3 変形ベッセル関数

18.3.1 積分表示

以下の積分表示は，いずれもしばしば用いられる。

$$K_\nu(z) = \int_0^\infty e^{-z\cosh t} \cosh \nu t \, dt \tag{325}$$

$$K_\nu(z) = \frac{1}{2}\left(\frac{z}{2}\right)^\nu \int_0^\infty \exp\left(-t - \frac{z^2}{4t}\right) t^{-\nu-1} dt \tag{326}$$

$$K_\nu(z) = \frac{\sqrt{\pi}(z/2)^\nu}{\Gamma(\nu+1/2)} \int_1^\infty e^{-zt}(t^2-1)^{\nu-1/2} dt \tag{327}$$

$$K_\nu(z) = \frac{\Gamma(\nu+1/2)(2z)^\nu}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \frac{\cos t}{(t^2+z^2)^{\nu+1/2}} dt \tag{328}$$

18.3.2 相互の関係

- (326) の右辺で $t \to zt/2$ とすると

$$\frac{1}{2}\int_0^\infty \exp\left[-\frac{z}{2}\left(t+\frac{1}{t}\right)\right] t^{-\nu-1}dt \tag{329}$$

ここで $t \to 1/t$ とすると

$$\frac{1}{2}\int_0^\infty \exp\left[-\frac{z}{2}\left(t+\frac{1}{t}\right)\right] t^{\nu-1}dt \tag{330}$$

となる。[13] (329)(330) より

$$K_\nu(z) = \frac{1}{2}\int_0^\infty \exp\left[-\frac{z}{2}\left(t+\frac{1}{t}\right)\right] \frac{t^\nu + t^{-\nu}}{2}\frac{1}{t}dt \tag{331}$$

である。最後に $t \to e^t$ と置き換えると (325) が得られる。よって (325) と (327) は等価。

- 他の関係は？

参考文献

[1] J. I. Kapsta, Finite-temperature Field Theory, CUP.

[2] M. Le Bellac, Thermal Field Theory, CUP.

[3] A. Das, Finite Temperature field theory, World Scientific.

[4] M. Laine, Basics of Thermal Field Theory.

[5] A. Das, Field Theory: a path integral approach (2nd ed.), World Scientific.

[6] A. Zee, Quantum Field Theory in a Nutshell, PUP.

[7] I. Moss, Quantum Theory, Black hole and Inflation, Wiley.

[8] P. Ramond, Field Theory: A Modern Primer, Addison Wesley.

[9] D. Bailin and A. Love, Introduction to Gauge Field Theory, IOP.

[13] したがって $K_\nu(z) = K_{-\nu}(z)$。

[10] R.J.Rivers, Path Integral Methods in Quantum Field Theory, CUP

[11] M. Stone, 量子場の物理, シュプリンガージャパン

[12] M. B. Green, J. H. Schwarz and E. Witten, Superstring Theory 1, CUP.

[13] L. Dolan and R. Jackiw, Physical Review D9 (1974) 3320.

[14] S. Coleman, Aspects of Symmetry, CUP.

[15] K. Shiraishi, Bose-Einstein Condensation in Compactified Spaces, Progress of Theoretical Physics Volume 77, Number 4, pp. 975-982 (1987).

[16] K. Shiraishi, Finite Temperature and Density Effects in Higher Dimensions with and without Compactifications, Progress of Theoretical Physics Volume 77, Number 5, pp. 1253-1266 (1987).

[17] K. Shiraishi, Finite Temperature and Density Effects on Symmetry Breaking by Wilson Loops, Zeitschrift fur Physik C35, No.1, pp. 37-42 (1987).

[18] K. Shiraishi, Finite Temperature Effect on Wilson Loop Mechanism, Progress of Theoretical Physics Volume 78, Number 3, pp. 535-539; Volume 81, Number 1, p. 248 (Errata) (1987).

[19] K. Shiraishi, Thermodynamic Potential for Compactified Bosonic strings, il Nuovo Cimento 100A, Number 5, pp. 683-692 (1988).

[20] A. Nakamura and K. Shiraishi, Gauge Fields on Torus and Partition Function of Strings, International Journal of Modern Physics A4, No. 2, pp. 389-400 (1989).

[21] K. Shiraishi, Cosmological String Theory with Thermal Energy, Europhysics Letters 8, No. 4, pp. 303-307 (1989).

[22] K. Shiraishi, Degenerate Fermion and Wilson Loops in 1+1 Dimensions, K. Shiraishi, Canadian Journal of Physics 68, No. 4-5, pp. 357-360 (1990).

[23] A. Nakamura and K. Shiraishi, Phase Transition and String Formation in Six-dimensional Gauge Theory, Progress of Theoretical Physics 84, No.6, pp. 1100-1107 (1990).

[24] A. Nakamura and K. Shiraishi, Condensation of Yang-Mills field at High Temperature in the Presence of Fermions, Acta Physica Slovaca 42, No. 6, pp. 338-343 (1992).

[25] Yoshitaka Degura and K. Shiraishi, Effective field theory of slowly moving 'extreme black holes', Classical and Quantum Gravity 17 issue19, pp. 4031-4050 (2000).

[26] Nahomi Kan and K. Shiraishi, Bulk Fermion Stars with New Dimensions, Physical Review D66 105014 (8 pages) (2002).

[27] Nahomi Kan, Kenji Sakamoto and K. Shiraishi, Deconstructing Scalar QED at Zero and Finite Temperature, The European Physical Journal C 28 Issue 3, pp. 425-430 (2003).

[28] Yoshinori Cho and K. Shiraishi, Finite density effects in Hosotani mechanism and a vacuum gauge ball, Algebras, Groups and Geometries, Volume 23, Number 3, pp. 303-325 (2006).