基礎物理学 I

白石　清（山口大学理学部）

平成 12 年 7 月 22 日

概 要

力学，波動，熱，に関する講義ノートです。
「回転運動と剛体」以降は，いまのところ覚え書き程度。

目 次

1　力（ちから）

ここからしばらくは（当分），力学の基本について学習する。

1.1　力とは何か

力　　force

・物体[1] の運動状態を変える。
・物体の変形

力を及ぼすもの，力を受けるもの。[2]

近接力 ⋯ 力を及ぼす物体が力を受ける物体に接触しているときの力。
　　（例）手で物体を押す力，摩擦力，垂直抗力，
糸の張力，バネの弾（性）力（復元力）

遠隔力 ⋯ 物体がたがいに接触していないのに，空間をへだてて働く力
　　（例）重力，電気力，磁気力（電磁気力）[3]

1.2　力の記述

1.2.1　力の属性

$$\left.\begin{array}{l}\text{・大きさ}\\\text{・向き}\end{array}\right\}\text{ベクトル ⋯「力はベクトルで表される。」}$$

「力」というものをベクトルと同一視するといってもよい。
ベクトルは，数学的にきちんと定義されている。
（数学的モデル化（の準備））[4]

・作用点（物体に力が働く点）

---

[1] 位置，質量，形などの性質をわれわれが記述できるもの。
[2] 物理では，原因，結果のように，対になるものが多い。
[3] これらは,「場」から受ける近接力と解釈することもできる。
[4] モデル ⋯ モデルの「しくみ」さえ知っていれば（数学！）きちんと「動く」。

1.2.2　物体に働く力

（物体が力を受ける）

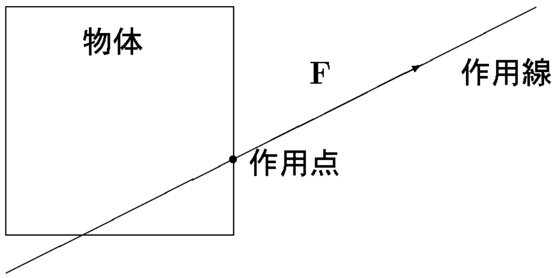

図 1: 物体に働く力

作用点（物体に力が働く点）
作用線（力の向きを表す）　力の作用点を通り力の方向にのびる直線
F（ベクトルは太文字で書く）[5]

ベクトルの大きさ（長さ）

$$|\mathbf{F}| = F \tag{1}$$

たまには

$$|\vec{\mathbf{F}}| = F \tag{2}$$

と書くかも知れない。

F が力を表すときは，F は力の大きさ。[6]

1.3　ベクトルの性質

1.3.1　ベクトルとベクトルの加法

A，**B**，**C** をベクトルとする。

[5] あるときには，矢印をつけて表す $(\vec{F})$。このノートでは，活字の問題で，両方使うことになる。
[6] ただし，一次元の運動の時は，力の向きも込めて，F は正負の値を示すことがある。

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{C} \tag{3}$$

これは図の関係を表す。

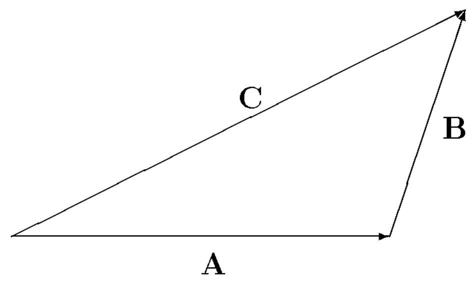

図 2: ベクトルの加法

$$\text{交換法則：}\quad \mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{B} + \mathbf{A} \tag{4}$$

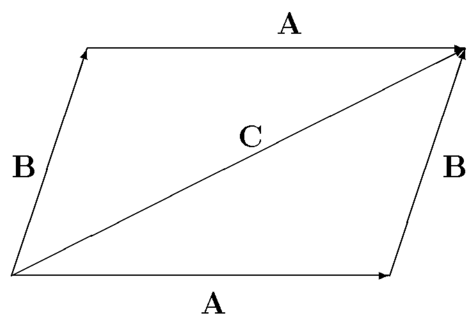

図 3: ベクトルの加法の交換法則

（ベクトルは加法について群をなす。）

$$\text{結合法則：}\quad (\mathbf{A} + \mathbf{B}) + \mathbf{C} = \mathbf{A} + (\mathbf{B} + \mathbf{C}) \tag{5}$$

・零ベクトル　$\mathbf{0}$

$$\mathbf{A}+\mathbf{0}=\mathbf{0}+\mathbf{A}=\mathbf{A} \tag{6}$$

零ベクトルの大きさは 0 $|\mathbf{0}|=0$
零ベクトルは向きをもたない。

$\mathbf{A}+\mathbf{B}=\mathbf{0}$ となるとき
$\mathbf{B}$ を $-\mathbf{A}$ と書くことにする。

$$\mathbf{A}+(-\mathbf{A})=(-\mathbf{A})+\mathbf{A}=\mathbf{0}$$

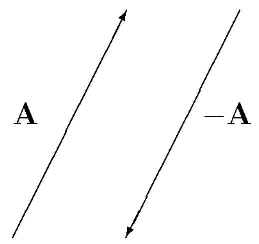

図 4: $\mathbf{A}$ と $-\mathbf{A}$

$-\mathbf{A}$ の大きさ $|-\mathbf{A}|=|\mathbf{A}|$
$-\mathbf{A}$ の向き $\mathbf{A}$ と正反対

1.3.2 ベクトルの実数倍

k 倍，k は実数
$k\mathbf{A}$ はベクトル
大きさは $|k\mathbf{A}|=|k||\mathbf{A}|$
向きは

$k>0$ のとき $\mathbf{A}$ と同じ
$k<0$ のとき $\mathbf{A}$ と逆（$-\mathbf{A}$ の向き）
$k=0$ のとき $0\mathbf{A}=\mathbf{0}$ よって向きは無い

$-\mathbf{A}=(-1)\mathbf{A}$ であることがわかる。

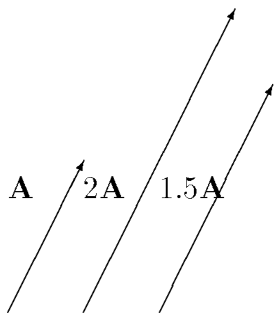

図 5: $\mathbf{A}$ の実数倍

1.3.3　ベクトルの成分

$$\mathbf{A} = A_x\hat{\mathbf{x}} + A_y\hat{\mathbf{y}} + A_z\hat{\mathbf{z}} \tag{7}$$

$\hat{\mathrm{x}}$：x 軸（正）方向の単位ベクトル
$\hat{\mathrm{y}}$：y 軸（正）方向の単位ベクトル
$\hat{\mathrm{z}}$：z 軸（正）方向の単位ベクトル

単位ベクトル：長さ（大きさ）が 1 のベクトル　例：$|\hat{\mathrm{x}}| = 1$

A_x：$\mathbf{A}$ の x 成分
A_y：$\mathbf{A}$ の y 成分
A_z：$\mathbf{A}$ の z 成分

<u>ベクトルの大きさと成分</u>

$$|\mathbf{A}| = \sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2} \tag{8}$$

<u>ベクトルの実数倍と成分</u>
$\mathbf{A}$ の成分が (A_x, A_y, A_z)

$$\mathbf{A} = (A_x, A_y, A_z) \tag{9}$$

このとき（k：実数）

$$k\mathbf{A} = (kA_x, kA_y, kA_z) \tag{10}$$

ベクトルの加法と成分

$\mathbf{A} = (A_x, A_y, A_z)$
$\mathbf{B} = (B_x, B_y, B_z)$
このとき

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} = (A_x + B_x, A_y + B_y, A_z + B_z) \tag{11}$$

1.4　力の合成

$\mathbf{F}_1$，$\mathbf{F}_2$ を考える。

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2$$

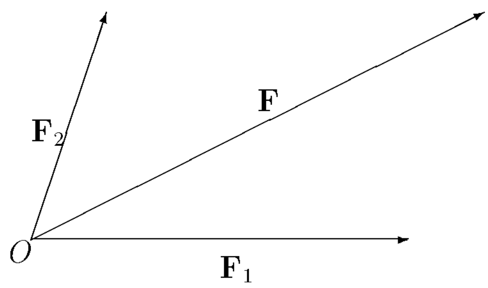

図 6: 合力と分力

作用点 O に働く 2 つの力 $\mathbf{F}_1$ と $\mathbf{F}_2$ の合力 を $\mathbf{F}$ とする。

逆に，$\mathbf{F}$ を $\mathbf{F}_1$，$\mathbf{F}_2$ に分解したとき，それぞれを 分力 と呼ぶ。

＊ 3 つ以上の力が 1 つの作用点に働く場合も同様。

1.5　力のつりあい

物体上の同一作用点に N 個の力が働く場合を考える。

合力 $\mathbf{F}$

$$\begin{aligned} \mathbf{F} &= \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \mathbf{F}_3 + \cdots + \mathbf{F}_N \\ &= \sum_{i=1}^{N} \mathbf{F}_i \end{aligned} \tag{12}$$

合力 $\mathbf{F} = \sum_{i=1}^{N} \mathbf{F}_i = 0$ のとき，
力が釣り合っている。
（合力（外力の和）が 0 なので，物体の状態が変えられない。）

とくに質点[7] が静止しているとき … 質点に働く合力が 0 となっている。（つりあっている。）

1.6　摩擦力

接地面：物体が接している地面（接触面）
摩擦力：接地面に平行に，物体の運動を妨げる向きに働く力。
　静止摩擦力と運動摩擦力がある。

1.6.1　静止摩擦力

・静止摩擦力 … 物体が動かないとき，接地面から受ける摩擦力
・垂直抗力 …. 接地面から物体がうける力。接地面に垂直。

今，物体は静止している。（物体に働く力がつりあっている。）
$\mathbf{F}$：外力
$\mathbf{W}$：重力
$\mathbf{N}$：垂直抗力
$\mathbf{f}$：摩擦力

力のつりあいより

$$\mathbf{W} + \mathbf{N} + \mathbf{F} + \mathbf{f} = \mathbf{0} \tag{13}$$

である。[8]

[7] 物体を 1 つの点とみなせる場合，それを質点と呼ぶ。
[8] つりあいは，同一作用点の場合ではなかったか？今の場合，明らかに物体は「回転」しないので，作用点をどこに「移動」して考えても，議論は変わらない。

$$\mathbf{W}+\mathbf{N}=\mathbf{0} \quad \text{（垂直成分）} \tag{14}$$

よって $|\mathbf{W}|=|\mathbf{N}|$

$$\mathbf{F}+\mathbf{f}=\mathbf{0} \quad \text{（水平成分）} \tag{15}$$

よって $|\mathbf{F}|=|\mathbf{f}|$

（ここで，水平と垂直方向のつり合いは，明らかに，独立に成り立つことに注目した。）

（物体に力を与えて接地面に沿って動かそうとするとき）
静止摩擦力の大きさの最大値は垂直抗力の大きさに比例する。（物体は静止している状態である。）

最大静止摩擦力は

$$f_{max}=\mu N \tag{16}$$

と書ける。
一般に $f<f_{max}$ である。

（静止）摩擦係数 μ は，接触している 2 つの物体の材質と接触面の状態によって決まる定数である。

（物体が斜面上で止まっている状態）

$$\mathbf{W}+\mathbf{N}+\mathbf{f}=\mathbf{0} \tag{17}$$

斜面の水平からの傾き：θ

$\mathbf{W}$ を斜面に平行と垂直な成分に分ける。

$$\mathbf{W}=\mathbf{W}_1+\mathbf{W}_2 \tag{18}$$

$|\mathbf{W}_1|=W_1=W\sin\theta$

$|\mathbf{W}_2|=W_2=W\cos\theta$

止まっている状態ということは

・平行成分が釣り合っている

$$\mathbf{W}_1 + \mathbf{f} = \mathbf{0} \tag{19}$$

$$W_1 = f \tag{20}$$

・垂直成分が釣り合っている

$$\mathbf{W}_2 + \mathbf{N} = \mathbf{0} \tag{21}$$

$$W_2 = N \tag{22}$$

成分で考えてみよう。

斜面に沿って x 軸，斜面と垂直に z 軸をとると

$$\mathbf{N} = (0, 0, N) \tag{23}$$

$$\mathbf{f} = (f, 0, 0) \tag{24}$$

$$\mathbf{W} = (-W\sin\theta, 0, -W\cos\theta) \tag{25}$$

x 方向のつりあい　$-W\sin\theta + f = 0$

z 方向のつりあい　$-W\cos\theta + N = 0$

$$f = N\tan\theta \tag{26}$$

ここで $f < \mu N$ なので

$$\tan\theta < \mu \tag{27}$$

1.6.2　運動摩擦力

物体が接地面に対して運動しているとき，運動摩擦力は物体の運動を妨げる向きにはたらく。

運動摩擦力の大きさは

$$f = \mu' N \tag{28}$$

μ' は運動摩擦係数で，一般に $\mu' < \mu$

μ' も物質とその状態に依存する。

2　質点の運動

質点の運動を考える。
質点とは，大きさのない物体。ある決まった質量をもっている。
質点の位置：座標で表せる … 位置ベクトルで表せる。
原点 O

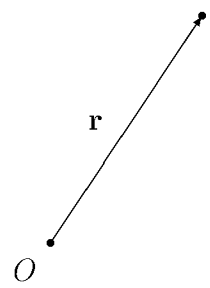

図 7: 位置ベクトル

質点の運動はその位置ベクトル $\mathbf{r}$ が時刻 t の関数であるとして表すことができる。

$$\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t), z(t)) \tag{29}$$

2.1　直線運動

質点が直線運動をしている。
例えば，直線を x 方向と考えれば，質点の位置は $x(t)$ の形で表せる。

・質点の速度

$$v(t) = \frac{dx}{dt} = \dot{x} \tag{30}$$

$$v(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{x(t + \Delta t) - x(t)}{\Delta t}$$

・質点の加速度

$$a(t) \;=\; \frac{dv}{dt} = \dot{v}$$

$$= \quad \frac{d^2x}{dt^2} = \ddot{x} \tag{31}$$

2.1.1　等速直線運動

（等速度運動）

$$x(t) = x_0 + v_0 t \tag{32}$$

ここで x_0，v_0 は定数。
横軸を t，縦軸を $x(t)$ ととると，グラフは直線。
$t = 0$ のとき $x = x_0$

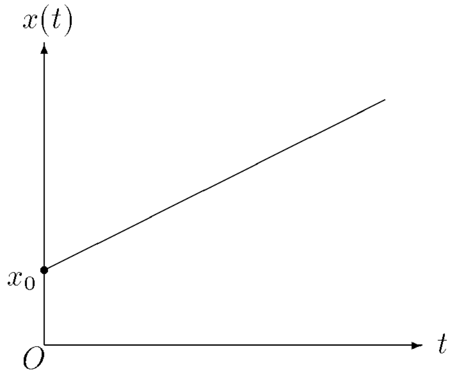

図 8: 等速直線運動

$$v(t) = \frac{dx}{dt} = v_0 \tag{33}$$

$$\begin{aligned} v(t) &= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{x_0 + v_0(t + \Delta t) - (x_0 + v_0 t)}{\Delta t} \\ &= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{v_0 \Delta t}{\Delta t} \\ &= v_0 \end{aligned} \tag{34}$$

等速直線運動では　加速度 $a = \frac{dv}{dt} = 0$

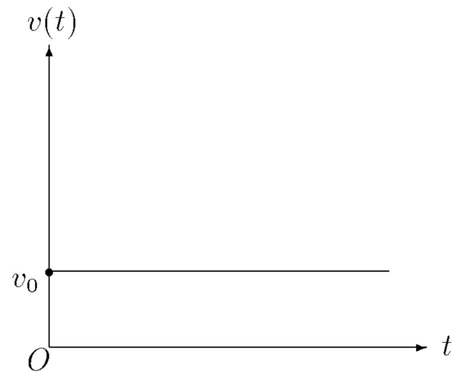

図 9: 等速直線運動をしている質点の速度

2.1.2 等加速度直線運動

$$x(t) = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a_0 t^2 \tag{35}$$

x_0，v_0，a_0 は定数。

$t = 0$ のとき $x = x_0$

横軸を t，縦軸を $x(t)$ ととると，グラフは放物線。

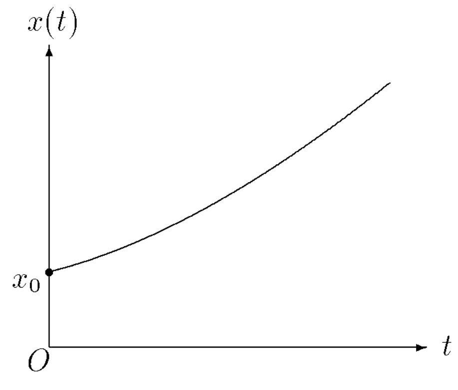

図 10: 等加速度直線運動

$$v(t) = \frac{dx}{dt} = v_0 + a_0 t \tag{36}$$

$t=0$ のとき $v=v_0$

$$
\begin{aligned}
v(t) &= \lim_{\Delta t\to 0}\frac{x_0+v_0(t+\Delta t)+\frac{1}{2}a_0(t+\Delta t)^2-(x_0+v_0t+\frac{1}{2}a_0t^2)}{\Delta t} \\
&= \lim_{\Delta t\to 0}\frac{v_0\Delta t+\frac{1}{2}a_0(2t\Delta t+\Delta t^2)}{\Delta t} \\
&= \lim_{\Delta t\to 0}[v_0+a_0(t+\frac{1}{2}\Delta t)] \\
&= v_0+a_0t \qquad (37)
\end{aligned}
$$

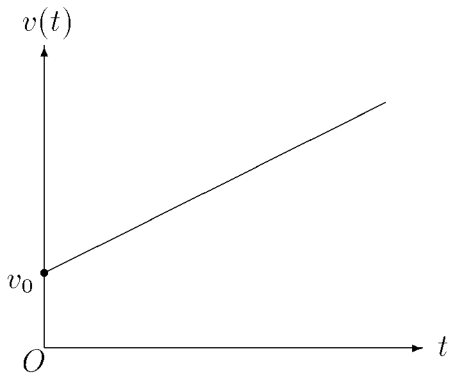

図 11: 等加速度直線運動をしている質点の速度

$$a(t)=\frac{dv}{dt}=a_0 \quad \text{：定数} \qquad (38)$$

＊簡単な関係式

$$v(t)=v_0+a_0t \qquad (39)$$

$$v^2(t)-v_0^2=2a_0v_0t+a_0^2t^2=2a_0\left\{x(t)-x_0\right\} \qquad (40)$$

2.1.3 鉛直投げ上げ

垂直上方に x 軸をとる。

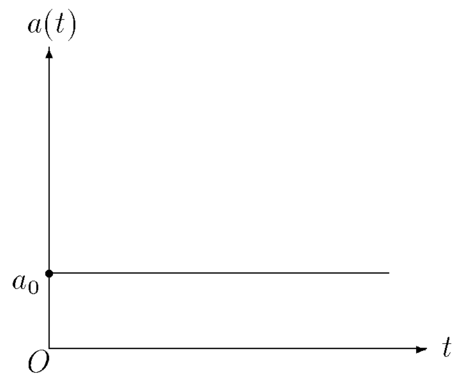

図 12: 等加速度直線運動をしている質点の加速度

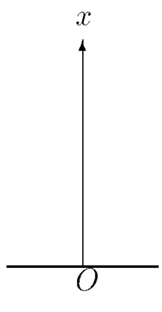

図 13: 鉛直投げ上げで使う座標

$$a_0 = -g \tag{41}$$

g は重力加速度（の大きさ）：($9.8\mathrm{m/s^2}$)

$$x(t) = x_0 + v_0 t - \frac{1}{2} g t^2 \tag{42}$$

$$v(t) = v_0 - gt \tag{43}$$

$t = 0$ のとき $x = x_0$，$v = v_0$[9]

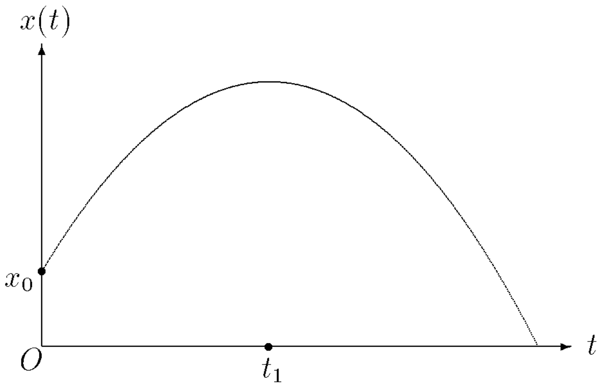

図 14: 鉛直投げ上げ

時刻 $t = t_1$ のとき最高点に到達

$$t_1 = \frac{v_0}{g} \tag{44}$$

（$v(t_1) = v_0 - g t_1 = 0$ より）

最高点の高さ H は

$$H = x(t_1) = x_0 + \frac{v_0^2}{2g} \tag{45}$$

[9] $v_0 = 0$ のときは，運動は「自由落下」とよばれる。

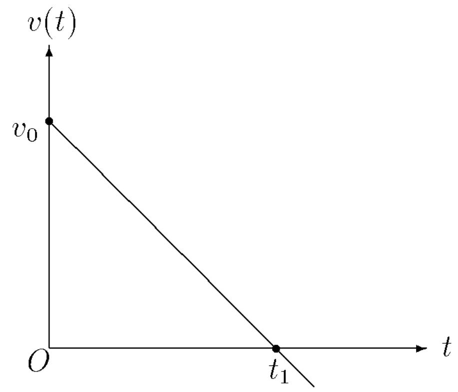

図 15: 質点の速度（鉛直投げ上げ）

2.2　空間内の任意の運動

位置ベクトル　$\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$

速度ベクトル　$\mathbf{v}(t) = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}\right)$

加速度ベクトル　$\mathbf{a}(t) = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}$

速度

$$\mathbf{v}(t) = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\mathbf{r}(t+\Delta t) - \mathbf{r}(t)}{\Delta t} \tag{46}$$

$\mathbf{v}(t)$ は $\mathbf{r}(t)$ で質点の軌跡に接するベクトルである。

加速度

$$\mathbf{a}(t) = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\mathbf{v}(t+\Delta t) - \mathbf{v}(t)}{\Delta t} \tag{47}$$

加速度ベクトルの向きは，一般に運動方向と（直接の）関係がない。ただし，直線運動は特別である。

3　運動の法則

3.1　ニュートンの運動の法則

ニュートンの運動の法則[10]

1　慣性の法則
2　$F = ma$
3　作用・反作用の法則

3.2　運動の第 2 法則

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a} \tag{48}$$

$\mathbf{F}$：質点が受ける力（質点に働く力）
m：質点の質量
$\mathbf{a}$：質点の加速度

・$\mathbf{F} = \mathbf{0}$：　力の働かないとき，　$\mathbf{a} = \mathbf{0} \to \mathbf{v} = \mathbf{v}_0$（一定）
運動状態が変わらない。

・第一法則は，そういう運動状態が変わらない場合が存在していることを要求している，と解釈できる。

・運動と力を測定 $\Leftrightarrow$ 質量を測定
堂々巡りか？

・各種の力にはそれぞれ固有の法則がある。
例：　重力　　バネの力　　…
そのため，いろいろな力の法則の関連を通して，
運動の法則は意味を持つ。

3.3　運動の第 3 法則

（作用反作用の法則）

連結した 2 つの物体 A，B（質量はそれぞれ m_A，m_B）を考える。

[10] 教科書に書いてあることを補足して下さい。

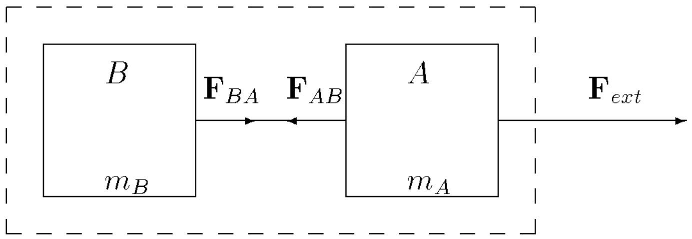

図 16: 連結した 2 つの物体

$\mathbf{F}_{AB}$：B が A に及ぼす力（A がうける力）
$\mathbf{F}_{BA}$：A が B に及ぼす力（B がうける力）

<u>作用・反作用の法則</u>

$$\mathbf{F}_{BA} + \mathbf{F}_{AB} = \mathbf{0} \tag{49}$$

物体 A が外力 $\mathbf{F}_{ext}$ をうけるとき
物体 A についての運動方程式

$$\mathbf{F}_A = \mathbf{F}_{ext} + \mathbf{F}_{AB} = m_A \mathbf{a} \tag{50}$$

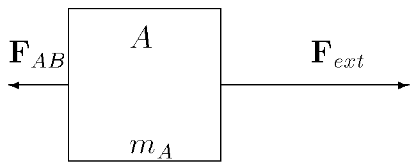

図 17: 物体 A に働く力

物体 B についての運動方程式

$$\mathbf{F}_B = \mathbf{F}_{BA} = m_B \mathbf{a} \tag{51}$$

A と B をいっしょにしたとき

$$\mathbf{F}_{A+B} = \mathbf{F}_A + \mathbf{F}_B$$

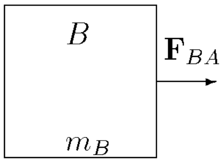

図 18: 物体 B に働く力

$$
\begin{aligned}
&= \mathbf{F}_{ext} + \underbrace{\mathbf{F}_{AB} + \mathbf{F}_{BA}}_{=0} \\
&= (m_A + m_B)\mathbf{a} \qquad (52)
\end{aligned}
$$

結局

$$\mathbf{F}_{ext} = (m_A + m_B)\mathbf{a} \qquad (53)$$

いくつかの物体をいっしょにして一つの物体として考えたとき
外力のみを考えればよい。
（内力は運動方程式中で考えなくてよい。）

4　物理量の次元と単位

4.1　力の単位

質量 1kg の物体が加速度 $1\mathrm{m/s^2}$ で加速されているとき，働いている力の大きさを 1N とする。

4.2　物理量の次元

単位がある ⇔ 次元をもっている

		単位では
長さの次元	[L]	m,cm,mm,...
質量の次元	[M]	kg,g,mg,...
時間の次元	[T]	sec,min,hr,...

$[v] = [\mathrm{LT^{-1}}]$　v ：速度（の大きさ）
$[a] = [\mathrm{LT^{-2}}]$　a ：加速度（の大きさ）
$[F] = [\mathrm{MLT^{-2}}]$　F ：力（の大きさ）

4.3　次元解析

「物理量の次元だけを考察することによって，
物理量の間の関係式を求める」こと
＝次元解析

例　振り子の周期 (T_c) を求める。

$[T_c] = [\mathrm{T}]$

振り子の長さ　ℓ　$[\ell] = [\mathrm{L}]$

おもりの質量　m　$[m] = [\mathrm{M}]$

重力加速度　g　$[g] = [\mathrm{LT^{-2}}]$

これらより　$\left[\sqrt{\frac{\ell}{g}}\right] = [\mathrm{T}]$

結論：　$T_c = \sqrt{\frac{\ell}{g}} \times$（定数）

わからない（無次元の）定数を除いて正しい答えが得られる。

5　等速円運動

5.1　極座標

x-y 平面上に限った質点の運動を議論する。

P の極座標　(r, θ)
直交座標（デカルト座標）では　$P(x, y)$

２つの座標の関係

$$x = r\cos\theta \tag{54}$$
$$y = r\sin\theta \tag{55}$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} \tag{56}$$
$$\tan\theta = \frac{y}{x} \tag{57}$$

5.2　質点の円運動

5.2.1　円運動の座標による記述

原点を中心とした円運動 $\cdots$ $r =$ 一定
原点を中心とした等速円運動 $\cdots$ $r =$ 一定，かつ $\frac{d\theta}{dt} =$ 一定
ここでの θ は時間の関数。

円運動では

$$x(t) = r\cos\theta(t) \tag{58}$$
$$y(t) = r\sin\theta(t) \tag{59}$$

なので
速度ベクトルの成分は

$$v_x(t) = \frac{dx}{dt} = -r\sin\theta(t)\frac{d\theta}{dt} \tag{60}$$
$$v_y(t) = \frac{dy}{dt} = r\cos\theta(t)\frac{d\theta}{dt} \tag{61}$$

$$\frac{d\theta}{dt} = \omega \tag{62}$$

（ω は角速度）とすると

$$\begin{aligned} v_x(t) &= -r\omega \sin\theta(t) && (63) \\ v_y(t) &= r\omega \cos\theta(t) && (64) \end{aligned}$$

$$|\mathbf{v}| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = r\omega \tag{65}$$

（$\omega > 0$ とした）

ω が定数のとき，等速円運動。

5.2.2 ベクトルを利用した円運動の記述

ベクトルの内積

スカラー積ともいう。

$$\begin{aligned} \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} &= A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z \\ &= |\mathbf{A}||\mathbf{B}| \cos\theta && (66) \end{aligned}$$

ただし，θ は $\mathbf{A}$ と $\mathbf{B}$ のなす角。

θ が $\pi/2$ のとき $\cdots$ $\cos\theta = 0$ $\cdots$ $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = 0$

逆に $|\mathbf{A}| \neq 0$，$|\mathbf{B}| \neq 0$ のとき，　$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = 0 \Rightarrow \theta = \pi/2$

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{A} = |\mathbf{A}|^2 \tag{67}$$

$$\begin{aligned} |\mathbf{A} + \mathbf{B}|^2 &= (\mathbf{A} + \mathbf{B}) \cdot (\mathbf{A} + \mathbf{B}) \\ &= \mathbf{A} \cdot \mathbf{A} + 2\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} + \mathbf{B} \cdot \mathbf{B} \\ &= |\mathbf{A}|^2 + 2\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} + |\mathbf{B}|^2 \\ &= |\mathbf{A}|^2 + 2|\mathbf{A}||\mathbf{B}| \cos\theta + |\mathbf{B}|^2 && (68) \end{aligned}$$

（これは，余弦定理と同じ）

$$\begin{aligned} \mathbf{r} &= (r\cos\theta, r\sin\theta) && (69)\\ \mathbf{v} &= (-r\omega\sin\theta, r\omega\cos\theta) && (70) \end{aligned}$$

$$\mathbf{r}\cdot\mathbf{v} = -r^2\omega\sin\theta\cos\theta + r^2\omega\sin\theta\cos\theta = 0 \tag{71}$$

ゆえに $\mathbf{r}$ と $\mathbf{v}$ は直交する。

・最初からベクトルで考察

$r =$ 一定

$r^2 = \mathbf{r}\cdot\mathbf{r}$

$$\begin{aligned} \frac{dr^2}{dt} = 0 &= \frac{d}{dt}(\mathbf{r}\cdot\mathbf{r})\\ &= \frac{d\mathbf{r}}{dt}\cdot\mathbf{r} + \mathbf{r}\cdot\frac{d\mathbf{r}}{dt}\\ &= 2\mathbf{r}\cdot\frac{d\mathbf{r}}{dt} && (72) \end{aligned}$$

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{v} \tag{73}$$

なので

$$\mathbf{r}\cdot\mathbf{v} = 0 \tag{74}$$

結論

$$r = \text{一定} \Rightarrow \mathbf{r}\cdot\mathbf{v} = 0 \tag{75}$$

∵ もっとベクトルを！

（天下り式）

$$\mathbf{v} = \vec{\omega}\times\mathbf{r} \tag{76}$$

$\vec{\omega}$：角速度ベクトル：原点を通るベクトル $|\vec{\omega}| = \omega$

$\times$：外積

ベクトルの外積

ベクトル積ともいう。

$\mathbf{A}\times\mathbf{B} = -\mathbf{B}\times\mathbf{A}$ は，$\mathbf{A}$ にも $\mathbf{B}$ にも垂直なベクトル。

$$\mathbf{A}\cdot(\mathbf{A}\times\mathbf{B}) = \mathbf{B}\cdot(\mathbf{A}\times\mathbf{B}) = 0 \tag{77}$$

成分で表すと

$$\mathbf{A}\times\mathbf{B} = (A_yB_z - A_zB_y, A_zB_x - A_xB_z, A_xB_y - A_yB_x) \tag{78}$$

向き

$$\begin{aligned}
\hat{\mathbf{x}}\times\hat{\mathbf{y}} &= -\hat{\mathbf{y}}\times\hat{\mathbf{x}} = \hat{\mathbf{z}} && (79)\\
\hat{\mathbf{y}}\times\hat{\mathbf{z}} &= -\hat{\mathbf{z}}\times\hat{\mathbf{y}} = \hat{\mathbf{x}} && (80)\\
\hat{\mathbf{z}}\times\hat{\mathbf{x}} &= -\hat{\mathbf{x}}\times\hat{\mathbf{z}} = \hat{\mathbf{y}} && (81)
\end{aligned}$$

$$\mathbf{A}\cdot(\mathbf{B}\times\mathbf{C}) = \mathbf{C}\cdot(\mathbf{A}\times\mathbf{B}) = \mathbf{B}\cdot(\mathbf{C}\times\mathbf{A}) \tag{82}$$

（成分で表して確かめよ。）

$$\mathbf{A}\times(\mathbf{B}\times\mathbf{C}) = (\mathbf{A}\cdot\mathbf{C})\mathbf{B} - (\mathbf{A}\cdot\mathbf{B})\mathbf{C} \tag{83}$$

明らかに

$$\mathbf{A}\times(\mathbf{B}\times\mathbf{C}) = \alpha\mathbf{B} + \beta\mathbf{C} \tag{84}$$

と書ける。

また，

$$\mathbf{A}\cdot(\mathbf{A}\times(\mathbf{B}\times\mathbf{C})) = 0 \tag{85}$$

より，

$$\mathbf{A}\times(\mathbf{B}\times\mathbf{C}) = \gamma[(\mathbf{A}\cdot\mathbf{C})\mathbf{B} - (\mathbf{A}\cdot\mathbf{B})\mathbf{C}] \tag{86}$$

がわかる。

γ を決めるためには，$\mathbf{A}=\hat{\mathrm{y}}$，$\mathbf{B}=\hat{\mathrm{x}}$，$\mathbf{C}=\hat{\mathrm{y}}$ などを代入。

大きさ

$$\begin{aligned}
|\mathbf{A}\times\mathbf{B}|^2 &= (\mathbf{A}\times\mathbf{B})\cdot(\mathbf{A}\times\mathbf{B})\\
&= \mathbf{B}\cdot((\mathbf{A}\times\mathbf{B})\times\mathbf{A})\\
&= -\mathbf{B}\cdot(\mathbf{A}\times(\mathbf{A}\times\mathbf{B}))\\
&= -\mathbf{B}\cdot[(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B})\mathbf{A} - (\mathbf{A}\cdot\mathbf{A})\mathbf{B}]\\
&= (\mathbf{A}\cdot\mathbf{A})(\mathbf{B}\cdot\mathbf{B}) - (\mathbf{A}\cdot\mathbf{B})^2 && (87)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
|\mathbf{A}\times\mathbf{B}|^2 &= |\mathbf{A}|^2|\mathbf{B}|^2 - |\mathbf{A}|^2|\mathbf{B}|^2\cos^2\theta \\
&= |\mathbf{A}|^2|\mathbf{B}|^2\sin^2\theta
\end{aligned} \tag{88}
$$

$$
|\mathbf{A}\times\mathbf{B}| = |\mathbf{A}||\mathbf{B}||\sin\theta| \tag{89}
$$

$\vec{\omega}$ は回転平面に垂直，$|\vec{\omega}| = \omega$
向きは質点の回転運動について，右ねじの進む向き

等速円運動の場合

$$
\mathbf{v} = \vec{\omega}\times\mathbf{r} \tag{90}
$$

と書ける。ただし $\vec{\omega}$ は定ベクトル。

ここで

$$
\begin{aligned}
\mathbf{r}\cdot\mathbf{v} &= \mathbf{r}\cdot(\vec{\omega}\times\mathbf{r}) \\
&= \vec{\omega}\cdot(\mathbf{r}\times\mathbf{r}) = 0
\end{aligned} \tag{91}
$$

に注意する。

5.3 等速円運動の座標による記述（おさらい）

質点 P が原点 0 を中心とする半径 r の円周上を一定の速さで v で運動する場合を考える。

中心角 θ は時間に比例して増加する。
時刻 $t = 0$ のとき $\theta = 0$ とすると，

$$
\theta = \omega t \tag{92}
$$

ここで ω は角速度。

$$
\omega = \frac{d\theta}{dt} \tag{93}
$$

等速の場合なので，ω は定数。

円が x-y 平面上にあるとして，

$$x = r\cos\theta \tag{94}$$
$$y = r\sin\theta \tag{95}$$

に $\theta = \omega t$ を代入すると，

$$x = r\cos\omega t \tag{96}$$
$$y = r\sin\omega t \tag{97}$$

半径 r で頂角 $\theta = \omega t$ の円弧の長さは $s = r\theta = r\omega t$ である。したがって等速円運動をする質点の速さ v は

$$v = \frac{s}{t} = \frac{r\omega t}{t} = r\omega \tag{98}$$

円の接線と半径は垂直なので，速度 $\mathbf{v}$ は位置ベクトル $\mathbf{r}$ に垂直で，[11] その成分は

$$v_x = -v\sin\omega t = -r\omega\sin\omega t \tag{99}$$
$$v_y = v\cos\omega t = r\omega\cos\omega t \tag{100}$$

5.4 等速円運動をしている質点の加速度

5.4.1 座標を用いた記述

x-y 平面上で等速円運動を考えることに戻る。

$$x = r\cos\theta \tag{101}$$
$$y = r\sin\theta \tag{102}$$

$$\mathbf{a} = (a_x, a_y, 0) \tag{103}$$

$$a_x = \ddot{x} = -r\omega^2\cos\theta = -\omega^2 x \tag{104}$$
$$a_y = \ddot{y} = -r\omega^2\sin\theta = -\omega^2 y \tag{105}$$

[11] 今，原点は円の中心にとった。

ここで$\dot{\theta} = \omega$，$\ddot{\theta} = 0$を使った。

$$\mathbf{a} = -\omega^2 \mathbf{r} \tag{106}$$

$$\begin{aligned} a = |\mathbf{a}| &= r\omega^2 && (107) \\ &= \frac{v^2}{r} && (108) \end{aligned}$$

5.4.2　ベクトルを用いた記述

加速度（等速円運動）

$$\begin{aligned} \mathbf{a} &= \dot{\mathbf{v}} = \vec{\omega} \times \dot{\mathbf{r}} = \vec{\omega} \times \mathbf{v} \\ &= \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \mathbf{r}) = (\mathbf{r} \cdot \vec{\omega})\,\vec{\omega} - \omega^2 \mathbf{r} && (109) \end{aligned}$$

特別な場合
$\vec{\omega} \cdot \mathbf{r} = 0$　$\vec{\omega}$と$\mathbf{r}$が直交するとき[12]
このときは

$$\mathbf{a} = -\omega^2 \mathbf{r} \tag{110}$$

$$\vec{\rho} \equiv \mathbf{r} - (\mathbf{r} \cdot \hat{\vec{\omega}})\hat{\vec{\omega}} \tag{111}$$

ここで$\hat{\vec{\omega}} \equiv \vec{\omega}/|\vec{\omega}|$とする。[13]
この$\vec{\rho}$をつかうと

$$\mathbf{a} = -\omega^2 \vec{\rho} \tag{112}$$

[12] すなわち，中心Oを通る平面上での円運動の場合
[13] $\mathbf{r}$と$\vec{\omega}$のなす角をθとすると，$(\mathbf{r} \cdot \hat{\vec{\omega}})\hat{\vec{\omega}}$は大きさ$|\mathbf{r}| \cos\theta$で$\vec{\omega}$の向きをもったベクトル。

5.4.3 補足

Q. 短い時間 t の間に水平に進む距離は vt であるが，質点は t の間にどれだけ中心 O に近づいているか？

$$\begin{aligned} \sqrt{r^2+v^2t^2}-r &= r\left(\sqrt{1+\frac{v^2t^2}{r^2}}-1\right) \\ &\approx r\left(1+\frac{v^2t^2}{2r^2}-1\right) \\ &= \frac{1}{2}\frac{v^2}{r}t^2 \end{aligned} \tag{113}$$

Exercise 各物理量の次元を確かめよ。

5.5 向心力

等速円運動している質点（質量 m）がある。
働いている力と加速度の関係はニュートンの運動の第 2 法則より

$$\mathbf{F}=m\mathbf{a} \tag{114}$$

$\mathbf{a}=-\omega^2\mathbf{r}$ をこの式に代入すると

$$\mathbf{F}=-m\omega^2\mathbf{r} \tag{115}$$

（平面上での等速円運動）[14]

$$F=|\mathbf{F}|=mr\omega^2=\frac{mv^2}{r} \tag{116}$$

質点の等速円運動をもたらすこのような力を 向心力 と呼ぶ。

[14] $\mathbf{r}$ が常に原点 O と同一平面にあるとき，$\vec{\rho}=\mathbf{r}$。

6　力と運動

運動方程式を解く。
方程式＋初期条件＝解
簡単な運動の具体的な例についての考察をする。

6.1　放物運動

一様重力場中での質点の運動。

初速 v_0 で水平と角 θ_0 をなす方向に質量 m の物体を投げたときの運動を考える。

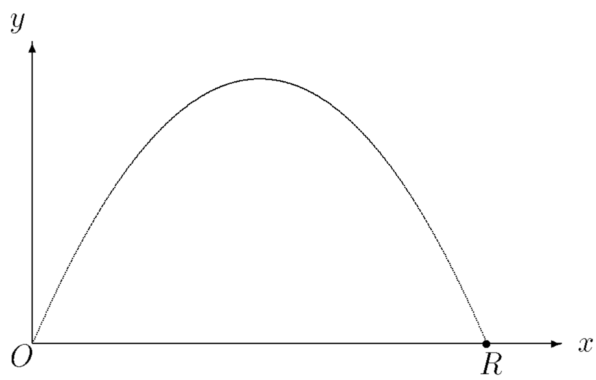

図 19: 放物運動

時刻 $t = 0$ において
質点は $x = 0$，$y = 0$ の位置にあるとする。
そのとき質点の速度（初速度）の成分は $v_x = v_{0x}$，$v_y = v_{0y}$ であるとする。
（これらが，初期条件。）

質点に働いている力は，鉛直下方に重力のみ。

$$F_x = 0 \tag{117}$$

$$F_y = -mg \tag{118}$$

ゆえにニュートンの運動方程式は，

$$
\begin{aligned}
ma_x &= 0 &(119)\\
ma_y &= -mg &(120)
\end{aligned}
$$

なので，加速度は

$$
\begin{aligned}
a_x &= 0 &(121)\\
a_y &= -g &(122)
\end{aligned}
$$

となる。

$$
\begin{aligned}
a_x &= \ddot{x} &(123)\\
a_y &= \ddot{y} &(124)
\end{aligned}
$$

なので

$$
\begin{aligned}
\ddot{x} &= 0 &(125)\\
\ddot{y} &= -g &(126)
\end{aligned}
$$

これを t で一回積分，ただし初期条件

$$
\begin{aligned}
v_x(0) &= v_{0x} &(127)\\
v_y(0) &= v_{0y} &(128)
\end{aligned}
$$

を満たすものを選ぶと，

$$
\begin{aligned}
\dot{x} &= v_{0x} &(129)\\
\dot{y} &= v_{0y} - gt &(130)
\end{aligned}
$$

これを再び t で一回積分，ただし初期条件

$$
\begin{aligned}
x(0) &= 0 &(131)\\
y(0) &= 0 &(132)
\end{aligned}
$$

を満たすものを選ぶと，

$$
\begin{aligned}
x &= v_{0x}t &(133)\\
y &= v_{0y}t - \frac{1}{2}gt^2 &(134)
\end{aligned}
$$

初速度 $\mathbf{v}_0 = (v_{0x}, v_{0y})$ は

$$\begin{aligned} v_{0x} &= v_0 \cos\theta_0 \quad (135) \\ v_{0y} &= v_0 \sin\theta_0 \quad (136) \end{aligned}$$

である。

物体が手から離れる時刻を $t = 0$ とする。

$a_x = 0$ なので，x 方向の運動は初速度 $v_0 \cos\theta_0$ の等速運動

$$v_x = v_0 \cos\theta_0 \tag{137}$$

$$x = v_{0x} t = v_0 t \cos\theta_0 \tag{138}$$

であり，

$a_y = -g$ なので，

y 方向の運動は加速度 $-g$，初速度 $v_0 \sin\theta_0$ の等加速度運動

$$v_y = v_0 \sin\theta_0 - gt \tag{139}$$

$$y = v_0 t \sin\theta_0 - \frac{1}{2} g t^2 \tag{140}$$

である。

最高点に到達するまでの時間 t_1 は，速度の y 成分が 0 となることつまり

$$v_y(t_1) = v_0 \sin\theta_0 - g t_1 = 0 \tag{141}$$

という条件から

$$t_1 = \frac{v_0 \sin\theta_0}{g} \tag{142}$$

最高点の高さ H は

$$H = y(t_1) = \frac{(v_0 \sin\theta_0)^2}{2g} \tag{143}$$

地面（ほんとは投げたときの高さと同じ高さ）に落下する時刻 t_2 は，

$$y(t_2) = v_0 t_2 \sin\theta_0 - \frac{1}{2} g t_2^2 = 0 \tag{144}$$

から求まり，

$$t_2 = 2t_1 = \frac{2v_0 \sin\theta_0}{g} \tag{145}$$

（対称性から，$t_2 = 2t_1$ が理解できる。）

$x(t)$，$y(t)$ の式から t を消去すると運動の軌道が求まる。（質点の軌跡）

$$y = x\tan\theta_0 - \frac{g}{2v_0^2\cos^2\theta_0}x^2 \tag{146}$$

落下点 $x = R$ は，上の式で $y = 0$ とおいたときの２つの解のうち，$x = 0$ でない方の解

$$R = \frac{2v_0^2}{g}\sin\theta_0\cos\theta_0 = \frac{v_0^2}{g}\sin 2\theta_0 \tag{147}$$

である。
ただし $2\sin\theta_0\cos\theta_0 = \sin 2\theta_0$ を用いた。

もちろん

$$R = v_{0x} t_2 \tag{148}$$

として求めてもよい。

初速 v_0 が同じならば，$\sin 2\theta_0 = 1$ になる $\theta = \pi/4 =$ ４５度のときに R は最大値

$$R_{max} = \frac{v_0^2}{g} \tag{149}$$

をとる。

6.2 雨滴の落下

抵抗力 … 簡単のため速さに比例する大きさの抵抗力を仮定。[15]

$$f = bv \tag{150}$$

[15] 本で,「ストークスの法則」などを調べてみるとよい？

b は定数。

雨滴（質量 m）の運動方程式は

$$F = m\ddot{x} = mg - bv \tag{151}$$

即ち

$$m\dot{v} = mg - bv \tag{152}$$

ただし，鉛直下向きに x 軸をとった。

図 20: 「雨滴の落下」で使う座標

方程式 $m\dot{v} = mg - bv$ を解く。

$$V \equiv v - \frac{mg}{b} \tag{153}$$

とおくと

$$\frac{dV}{dt} = -\frac{b}{m}V \tag{154}$$

となる。
さらに

$$\tau = \frac{b}{m}t \tag{155}$$

とおくと，

$$\frac{dV}{d\tau} = -V \tag{156}$$

この方程式の解は[16]

$$V = Ce^{-\tau} \tag{157}$$

（C は積分定数）
したがって

$$v = \frac{mg}{b} + Ce^{-\frac{b}{m}t} \tag{158}$$

が解。

初期条件として，$t = 0$ のとき $v = 0$ とする。この条件から C が決まる。

$$v(t) = \frac{mg}{b}\left(1 - e^{-\frac{b}{m}t}\right) \tag{159}$$

t が十分大きいと

$$v \to \frac{mg}{b} = v_t \quad \text{（終端速度）} \tag{160}$$

$v = v_t$ のときは運動方程式は $m\dot{v} = 0$
抵抗力と重力が釣り合った状態。
この状態に近づくことは，抵抗力がより複雑な一般の場合にも通用する。

t が小さいときは，

$$e^{-\frac{b}{m}t} \approx 1 - \frac{b}{m}t + \frac{1}{2}\frac{b^2}{m^2}t^2 + \cdots \tag{161}$$

なので

$$v \approx gt \tag{162}$$

自由落下に近い。
はじめは速度が小さいので抵抗力が無視できるため。

ここではやりませんが，位置は $x = \int v dt$ という積分で求められる。

[16] $\frac{d}{dx}e^x = e^x$，$e^0 = 1$ である。

6.3 振動

$$F = -kx \tag{163}$$

k は定数。
変形量 x の基準は変形の無いとき
これを Hooke の法則という。[17]

一次元単振動
質点に働く力 $F = -kx$ とすると運動方程式は

$$m\ddot{x} = -kx \tag{164}$$

この式を解く。

$$\frac{k}{m} = \omega^2 \tag{165}$$

とすると

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0 \tag{166}$$

なのでこの解は

$$x(t) = a\sin\omega t + b\cos\omega t \tag{167}$$

（a，b は定数）

a，b は初期条件を与えれば決まる。
例えば $t = 0$ で $x = x_0$，$v = v_0$ という条件では

$$x(t) = x_0\cos\omega t + \frac{v_0}{\omega}\sin\omega t \tag{168}$$

以上のような解を一般に単振動（の解）と呼ぶ。

単振動は次のようにも書ける。

$$x(t) = A\cos(\omega t + \beta) \tag{169}$$

このとき A は振幅，ω は角振動数，$\omega t + \beta$ は位相，β は（初期）位相とよばれる。

[17] フックの法則：力を加えない自然の状態からの変形の大きさが小さいときには，復元力の大きさは，変形の大きさに比例する。

6.4　単振り子の微小振動

一様重力場中
おもりに働く重力の大きさは mg である。
重力のおもりの軌道の接線方向成分（-合力の大きさ）は

$$F = -mg\sin\theta \tag{170}$$

O を最下点とする。
図の弧 OP の長さは $\ell\theta$ なので，これを運動を表す座標とする。
おもりの加速度の軌道接線方向成分は

$$\frac{d^2(\ell\theta)}{dt^2} = \ell\frac{d^2\theta}{dt^2} \tag{171}$$

である。

したがっておもりの接線方向の運動方程式は

$$m\ell\frac{d^2\theta}{dt^2} = -mg\sin\theta \tag{172}$$

振り子のふれが小さく，θ が 1 に比べてはるかに小さな場合には，$\sin\theta\approx\theta$ なので，上式は，

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{g}{\ell}\theta \tag{173}$$

ここで $\omega^2\equiv g/\ell$ とおくと，運動方程式の一般解は次のようになる。

$$\theta(t) = A\cos(\omega t+\beta) \tag{174}$$

ここで

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{\ell}} \tag{175}$$

振幅の小さな振動の周期 T と振動数 f

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}} \tag{176}$$

$$f = \frac{1}{T} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{\ell}} \tag{177}$$

は振幅 A にも質量 m にもよらないという著しい性質がある。
（振り子の等時性）

（時刻 t と $t+T$ のときの位相の差は 2π である。）

6.5　減衰振動

質点（質量 m）に働く外力として，バネの復元力の他に，
速度に比例した抵抗力が働くとき

$$F = ma \tag{178}$$

より

$$m\ddot{x} = \underbrace{-kx}_{\text{復元力}}\underbrace{-2m\gamma\dot{x}}_{\text{抵抗力}} \tag{179}$$

$x(t)$ は時刻 t での質点の位置の座標

書き換えると

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\gamma\frac{dx}{dt} + \omega^2 x = 0 \tag{180}$$

ただし $\omega = \sqrt{k/m}$

この運動方程式の解は　（A，B，β は積分定数。）

1.　$\omega > \gamma$ のとき　$x(t) = Ae^{-\gamma t}\cos(\sqrt{\omega^2 - \gamma^2}t + \beta)$　（減衰振動）

2.　$\omega = \gamma$ のとき　$x(t) = (A + Bt)e^{-\gamma t}$　（臨界減衰）

3.　$\omega < \gamma$ のとき　$x(t) = Ae^{(-\gamma - \sqrt{\gamma^2 - \omega^2})t} + Be^{(-\gamma + \sqrt{\gamma^2 - \omega^2})t}$　（過減衰）

いずれの場合も $t \to \infty$ で $x \to 0$

解き方：

$x(t) = y(t)e^{-\gamma t}$ とおく。

7　保存量

7.1　仕事

質点がある道のりを通って動く。

・道のりの上のある点 $\mathbf{r}$ では質点は外力 $\mathbf{F}$ を受けるとする。
・$\mathbf{r}(t)$ を与えると道のりは決まる。
・$\mathbf{F}$ は $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ と書ける。

このとき，外力 $\mathbf{F}$ が質点にした仕事は，

$$\int_P^Q \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} = W \tag{181}$$

[18]

簡単な場合 … 一次元（x 軸上）

まず力も x 方向しか働かないとする。
さらに $F =$ 一定のときは $W = Fs$
F が x によるときは $W = \int_0^s F(x)dx$

力が x 方向以外にも向くとき　$W = \int_P^Q F_x dx$

仕事の単位　J　（ジュール）
$1\mathrm{J} = 1\mathrm{Nm} = 1\mathrm{kg\ m^2/s^2}$

例 1　　一様重力場内で，質量 m の物体を垂直に h だけ持ち上げる。このときどれだけの仕事を物体に与えればよいか。

$F = mg$ … 力が釣り合っている。

つり合いにきわめて近い条件で無限にゆっくりと持ち上げるとすると，物体に与える仕事は

$$W = \int_0^h F dx = mgh \tag{182}$$

[18] $\mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} = F_x dx + F_y dy + F_z dz$

同様に斜めに持ち上げるとき，
この場合も $W = mgh$
実は，一様重力場内ではどういうみちのりをとっても h だけ持ち上げるのに必要な仕事はおなじで

$$W = mgh \tag{183}$$

となる。

W はどこにいったのか？
状況（質点の位置）が変わった。
この状況（位置）の中に W と同じだけのものをもっている。
それを位置エネルギーと呼ぶ。
（例 1 では，mgh　 h（位置の変化分）に依存する。（h の関数））

例 2　　バネの復元力に抗して，バネを s だけのばす。

$F = kx$ … 力が釣り合っている。

つり合いにきわめて近い条件で無限にゆっくりとバネを伸ばすとすると，物体に与える仕事は

$$W = \int_0^s F dx = \int_0^s kx dx = \frac{1}{2} ks^2 \tag{184}$$

したがって s だけバネが s だけのびた状態は，位置エネルギー $\frac{1}{2}ks^2$ をもっている。

7.2　仕事率

単位時間あたりの仕事の量。
仕事率 P

$$P = \frac{\Delta W}{\Delta t} \tag{185}$$

仕事率の単位は J/s であり，これを 1W（ワット）とよぶ。

7.3　エネルギーの保存

ここでは，質点について考える。

7.3.1　運動エネルギー

運動方程式

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a} = m\ddot{\mathbf{r}} = m\dot{\mathbf{v}} \tag{186}$$

の両辺に v を内積

$$\mathbf{F}\cdot\mathbf{v} = m\dot{\mathbf{v}}\cdot\mathbf{v} = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}m\mathbf{v}\cdot\mathbf{v}\right) \tag{187}$$

この式を時間で積分（ただし状況は図のとおり。）

左辺は

$$\begin{aligned}\int_{t_P}^{t_Q}\mathbf{F}\cdot\mathbf{v}dt &= \int_{t_P}^{t_Q}\mathbf{F}\cdot\frac{d\mathbf{r}}{dt}dt \\ &= \int_{\mathbf{r}_P}^{\mathbf{r}_Q}\mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = W \end{aligned} \tag{188}$$

（運動の間に外力が質点にした仕事）

右辺は

$$\begin{aligned}\int_{t_P}^{t_Q}\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}mv^2\right)dt &= \left.\frac{1}{2}mv^2\right|_Q - \left.\frac{1}{2}mv^2\right|_P \\ &= \frac{1}{2}mv_Q^2 - \frac{1}{2}mv_P^2 \end{aligned} \tag{189}$$

式を移項すると

$$\frac{1}{2}mv_P^2 + W = \frac{1}{2}mv_Q^2 \tag{190}$$

$\frac{1}{2}mv^2$ で表される量（運動エネルギー）が W（仕事）だけ増加した。

<u>まとめ</u>

外力によって与えられた仕事の分だけ，質点の運動エネルギーが増加した。

7.3.2　位置エネルギー（ポテンシャルエネルギー）

<u>例 1</u>　一様重力場内の質点

$$m\ddot{x} = -mg \tag{191}$$

$$m\dot{x}\ddot{x} = -mg\dot{x} \tag{192}$$

積分することにより

$$\frac{1}{2}mv_B^2 - \frac{1}{2}mv_A^2 = -mg(x_B - x_A) \tag{193}$$

$$\underbrace{\frac{1}{2}mv_A^2 + mgx_A}_{A\,\text{での量}} = \underbrace{\frac{1}{2}mv_B^2 + mgx_B}_{B\,\text{での量}} \tag{194}$$

この量は場所によらず一定。

この例では

$$\underbrace{\underbrace{\frac{1}{2}mv^2}_{\text{運動エネルギー}} \quad + \quad \underbrace{mgx}_{\text{（重力の）位置エネルギー}}}_{\text{力学的エネルギー}} = \text{一定} \tag{195}$$

力学的エネルギーは一定＝保存

外から仕事 W があたえられた場合
質点の力学的エネルギーは W だけ増加する。

例２　バネの弾力が質点に働く

$$m\ddot{x} = -kx \tag{196}$$

$$m\dot{x}\ddot{x} = -kx\dot{x} \tag{197}$$

$$\frac{1}{2}mv_A^2 + \frac{1}{2}kx_A^2 = \frac{1}{2}mv_B^2 + \frac{1}{2}kx_B^2 = \text{一定} \tag{198}$$

力学的エネルギーは保存している。
$\frac{1}{2}kx^2$ …（バネの復元力に関する）位置エネルギー（ポテンシャルエネルギー）

具体的に，運動方程式の解（単振動の解）を入れてみて確かめられる。

例３　摩擦のあるとき（雨滴の落下）
垂直上方に x 軸をとる。

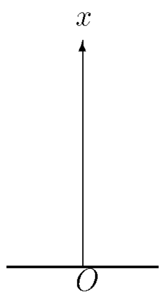

図 21: 今回使う座標

$$m\ddot{x} = -mg - b\dot{x} \tag{199}$$

$$m\dot{x}\ddot{x} = -mg\dot{x} - b\dot{x}^2 \tag{200}$$

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{1}{2}m\dot{x}^2 + mgx\right] = -b\dot{x}^2 \tag{201}$$

このことから，$b = 0$ のときは力学的エネルギーは保存する。

$b > 0$ のとき，(201) の右辺は負。よって力学的エネルギーは時間とともに減少する。

摩擦（抵抗）のある場合は力学的エネルギーは一般に時間とともに減少する。

摩擦によって，熱が生じる。

この発熱の寄与も含めて「エネルギー」を定義しなおすことができる，と考える。

力学的エネルギーの減少分＝発熱等

7.4 運動量の保存

7.4.1 運動量

質点の運動方程式において，

$$\mathbf{p} \equiv m\mathbf{v} \tag{202}$$

とおくと，

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a} = m\dot{\mathbf{v}} = \dot{\mathbf{p}} \tag{203}$$

p を質点の運動量と呼ぶ。

外力 F が 0 のときは，$\dot{\mathrm{p}} = 0$ となり，運動量の大きさは「時間的に一定」（=保存）する。

次に，２つの質点を考える。

$$m_A\mathbf{a}_A = \mathbf{F}_A + \mathbf{F}_{AB}, \quad m_B\mathbf{a}_B = \mathbf{F}_B + \mathbf{F}_{BA} \tag{204}$$

$$\mathbf{p}_A = m_A\mathbf{v}_A, \quad \mathbf{p}_B = m_B\mathbf{v}_B \tag{205}$$

このとき

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(\mathbf{p}_A + \mathbf{p}_B) &= \mathbf{F}_A + \mathbf{F}_B + \mathbf{F}_{AB} + \mathbf{F}_{BA} \\ &= \underbrace{\mathbf{F}_A + \mathbf{F}_B}_{\text{外力}} \quad \text{（作用反作用の法則による。）} \end{aligned} \tag{206}$$

外力が 0 のとき

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{p}_A + \mathbf{p}_B) = \mathbf{0} \tag{207}$$

$\mathbf{p} \equiv \mathbf{p}_A + \mathbf{p}_B$ は保存する。

p は全運動量と呼ばれる。２つ以上の場合にも拡張される。

一般に全運動量（あるいは各質点の運動量の総和）は外力の働かないときには，保存する。[19]

7.4.2　２つの質点の衝突

ただし，同一直線上の運動を考える。

２つの質点の衝突：ある限られた時間内だけ互いに力を及ぼしあう。

一般に，この力の性質を議論しても始まらない。

衝突前と，衝突後での，全運動量の保存を考えると，

[19] 裏を返せば，内力は働いていても成り立つということ。

$$\underbrace{p_A + p_B}_{\text{前}} = \underbrace{p_A{}' + p_B{}'}_{\text{後}} \tag{208}$$

一般に運動量保存だけでは，衝突の問題は解けない。

衝突に関わる一番簡単な情報として，はねかえり係数（反発係数）を導入する。

はねかえり係数 (e) とは，衝突後の 2 粒子の速度の差と衝突前の 2 粒子の速度の差の絶対値の比である。

定義

$$e = \frac{v'_B - v'_A}{v_A - v_B} \quad (> 0) \tag{209}$$

この値を与えれば，衝突の問題は解くことができる。

$e = 1$ のとき	弾性衝突	全力学的エネルギーは保存
$e \neq 1$ のとき	非弾性衝突	力学的エネルギーは保存しない
$e = 0$ のとき	完全非弾性衝突	力学的エネルギーは保存しない

力学的エネルギーの変化

$$\underbrace{m_A v_A + m_B v_B}_{\text{衝突前の運動量}} = \underbrace{m_A v'_A + m_B v'_B}_{\text{衝突後の運動量}} \tag{210}$$

$$\underbrace{\frac{1}{2}m_A v_A^2 + \frac{1}{2}m_B v_B^2}_{\text{衝突前の力学的エネルギー}} = \underbrace{\frac{1}{2}m_A {v'_A}^2 + \frac{1}{2}m_B {v'_B}^2}_{\text{衝突後の力学的エネルギー}} + Q \tag{211}$$

$Q = 0$ ならエネルギー保存。

(211) の両辺に $2(m_A + m_B)$ をかける。

$$\begin{aligned} & (m_A^2 + m_A m_B)v_A^2 + (m_B^2 + m_A m_B)v_B^2 \\ = \; & (m_A^2 + m_A m_B){v'_A}^2 + (m_B^2 + m_A m_B){v'_B}^2 \\ + \; & 2(m_A + m_B)Q \end{aligned} \tag{212}$$

(210) を辺辺 2 乗

$$m_A^2 v_A^2 + 2m_A m_B v_A v_B + m_B^2 v_B^2 = m_A^2 {v'_A}^2 + 2m_A m_B v'_A v'_B + m_B^2 {v'_B}^2 \tag{213}$$

$(212)-(213)$

$$m_A m_B (v_A - v_B)^2 = m_A m_B (v'_A - v'_B)^2 + 2(m_A + m_B)Q \tag{214}$$

一方 (209) から

$$(v'_A - v'_B)^2 = e^2(v_A - v_B)^2 \tag{215}$$

(215)，(215) より

$$Q = \frac{1}{2}\frac{m_A m_B}{m_A + m_B}(1 - e^2)(v_A - v_B)^2 \tag{216}$$

一般に $e < 1$ のとき，$Q > 0$[20]

粒子系の力学的エネルギーの和は，衝突後減少。

$Q = 0$ は $e = 1$（完全弾性衝突），$e = -1$（素通り（衝突しない））のときのみ。

・m_B が非常に大きいとき，$v_B = v'_B = 0$

この特殊な場合，$v'_A = -e\ v_A$

ゆえに $Q \approx \frac{1}{2}m_A v_A^2 - \frac{1}{2}m_A {v'_A}^2$ と書ける。

$Q(>0)$ は何なのか？

Q を含めたエネルギー保存則が成り立つとすることができ，Q は熱エネルギーや音，光のエネルギーと考えることができる。

まとめ

保存する量を用いて運動のようすを分析することができる。

7.5 力積

外力 $\mathbf{F}$ が粒子に働くとき

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \mathbf{F} \tag{217}$$

衝突等のときのように力（の原因）がある時間間隔（Δt）の中でのみ働くとき

接触前の運動量　$\mathbf{p}$

接触後の運動量　$\mathbf{p}'$

時間間隔 Δt が非常に小さいとき

$$\frac{\Delta\mathbf{p}}{\Delta t} = \mathbf{F} \to \Delta\mathbf{p} = \mathbf{F}\Delta t \to \mathbf{p}' - \mathbf{p} = \underbrace{\mathbf{F}\Delta t}_{\text{力積}} \tag{218}$$

[20] もともと e は相対速度の衝突前後の比なので，ふつう $0 \le e \le 1$。

力積 は運動量の変化をもたらす。

仕事 はエネルギーの変化をもたらす。

8　慣性力

慣性力　　見かけの力
加速度をもった系における観測者のみが感じる力。

力の作用を受けていない物体が静止の状態をつづけるか，等速直線運動を行う座標系が存在すると主張する。

このような慣性の法則が成り立つ座標系 ⋯　慣性系
成り立たない ⋯ 非慣性系

慣性力（見かけの力）は，非慣性系において生じる。

例 1
外から見ると
質量 m の粒子の運動方程式は

$$m\mathbf{a} = \mathbf{T} + \mathbf{W} \tag{219}$$

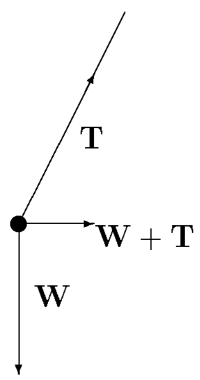

図 22: 重力と張力の合力

しかし中から見ると止まって見える。

$$\tilde{\mathbf{F}} + \mathbf{T} + \mathbf{W} = \mathbf{0} \tag{220}$$

となるようなつりあいをつくる力 $\tilde{\mathbf{F}}$ が粒子に働いているように見える。

$$\text{慣性力（みかけの力）} \quad \tilde{\mathbf{F}} = -m\mathbf{a} \tag{221}$$

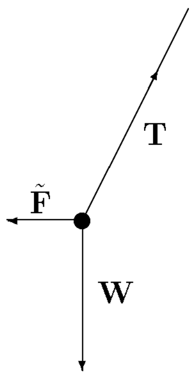

図 23: 見かけの力を含めたつり合い

<u>例 2</u>

回転している系（加速度を持つ）

$\vec{\omega}$： 板の回転の角速度ベクトル

板の上に粒子が止まっている時の，外から見た速度 $\mathbf{V}$ は

$$\mathbf{V} = \vec{\omega} \times \mathbf{r}' \tag{222}$$

板の上で速度 $\mathbf{v}'$ で粒子が動くとする。板の外から見れば粒子の速度は

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}' + \mathbf{V} = \frac{d\mathbf{r}'}{dt} + \vec{\omega} \times \mathbf{r}' \tag{223}$$

このことから，外から見た量については，時間微分を

$$\frac{d}{dt} + \vec{\omega}\times \tag{224}$$

でおきかえればよいことがわかる。

外から見た粒子の加速度

$$\begin{aligned} \mathbf{a} &= \frac{d\mathbf{v}}{dt} + \vec{\omega} \times \mathbf{v} \\ &= \frac{d}{dt}(\mathbf{v}' + \vec{\omega} \times \mathbf{r}') + \vec{\omega} \times (\mathbf{v}' + \vec{\omega} \times \mathbf{r}') \\ &= \dot{\mathbf{v}}' + \dot{\vec{\omega}} \times \mathbf{r}' + \vec{\omega} \times \dot{\mathbf{r}}' + \vec{\omega} \times \mathbf{v}' + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \mathbf{r}') \\ &= \mathbf{a}' + \dot{\vec{\omega}} \times \mathbf{r}' + 2\vec{\omega} \times \mathbf{v}' + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \mathbf{r}') \end{aligned} \tag{225}$$

ここで$\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \mathbf{r}') = -\omega^2 \vec{\rho}$
よって

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}' + \dot{\vec{\omega}} \times \mathbf{r}' + 2\vec{\omega} \times \mathbf{v}' - \omega^2 \vec{\rho} \tag{226}$$

運動方程式

$$\begin{aligned} \mathbf{F} &= m\mathbf{a} \\ &= m\mathbf{a}' + m\dot{\vec{\omega}} \times \mathbf{r}' + 2m\vec{\omega} \times \mathbf{v}' - m\omega^2 \vec{\rho} \end{aligned} \tag{227}$$

板の上から見た粒子の運動方程式

$$m\mathbf{a}' = \mathbf{F} - m\dot{\vec{\omega}} \times \mathbf{r}' - 2m\vec{\omega} \times \mathbf{v}' + m\omega^2 \vec{\rho} \tag{228}$$

$\mathbf{v}' = 0$，$\mathbf{a}' = 0$，$\dot{\vec{\omega}} = 0$のとき，

$$\mathbf{0} = \mathbf{F} + \underbrace{m\omega^2 \vec{\rho}}_{\text{遠心力}} \tag{229}$$

$\mathbf{v}' \neq 0$のとき，慣性力

$$\tilde{\mathbf{F}}_c = -2m\vec{\omega} \times \mathbf{v}' \tag{230}$$

はコリオリ力と呼ばれる。

地球回転によるコリオリ力は，北半球では粒子の進行方向の右向きに働く。

（大気の運動，川底のようす，などは，地球の回転に起因するコリオリ力を考えることによってきちんと説明できる。）

9　回転運動と剛体

9.1　質点の回転運動

質点の質量：m
質点の速度：$\mathbf{v}$
質点の位置：$\mathbf{r}$

9.1.1　力のモーメント

$$\mathbf{N} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$$

9.1.2　角運動量

$$\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p} = \mathbf{r} \times m\mathbf{v}$$

9.1.3　回転運動の法則

質点に対する運動方程式

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a} \to \frac{d\mathbf{p}}{dt} = \mathbf{F}$$

から，次のことが導かれる。

$$\to \mathbf{r} \times \frac{d\mathbf{p}}{dt} = \mathbf{r} \times \mathbf{F} \to \frac{d\mathbf{L}}{dt} = \mathbf{N}$$

9.1.4　中心力

原点 O を中心とする。$\mathbf{F}$ が $\mathbf{r}$ と向きが同じ（逆向きも含む）とき，$\mathbf{F}$ は中心力。
（例）中心から張られた糸の張力，万有引力

9.1.5　中心力と角運動量保存則

$\mathbf{F}$ が中心力のとき，$\mathbf{F}$ による力のモーメント $\mathbf{N}$ は $\mathbf{0}$。ゆえに角運動量 $\mathbf{L}$ は一定。

9.2 剛体のつり合いと重心

9.2.1 剛体

剛体は，互いの位置を変えない，質点のあつまりとみなしてよい。

9.2.2 剛体のつり合い

外力の和＝０

$$\mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \cdots = \mathbf{0}$$

ある軸のまわりの力のモーメントの和＝０

$$\mathbf{N}_1 + \mathbf{N}_2 + \cdots = \mathbf{0}$$

9.2.3 安定なつり合いと不安定なつり合い

9.2.4 偶力

例を挙げよ！

9.2.5 重心

重心の位置ベクトル：$\mathbf{R}$

$$\mathbf{R} = \sum_i \frac{m_i \mathbf{r}_i}{M}$$

$$M = \sum_i m_i$$

9.2.6 剛体および質点系の重心の方程式

$$M\mathbf{A} = \mathbf{F}$$

ここで $\mathbf{A} = \frac{d^2\mathbf{R}}{dt^2}$，$\mathbf{F}$ は外力の総和

9.3　剛体の回転運動

9.3.1　固定軸のある剛体の運動

ある固定軸のまわりの回転で

$$\mathbf{L} = I\omega$$

と書ける場合，I をこの軸のまわりの慣性モーメントと呼ぶ。
このときの回転の運動エネルギーは

$$K = \frac{1}{2}I\omega^2$$

9.3.2　剛体の平面運動

9.4　ベクトル積で表した回転運動の法則

点 $\mathbf{r}$ にある質量 m，速度 $\mathbf{v}$ の質点に力 $\mathbf{F}$ が働いているとき，原点 O のまわりの力 $\mathbf{F}$ のモーメント $\mathbf{N}$ と質点の角運動量 $\mathbf{L}$ は

$$\mathbf{N} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$$

$$\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p} = \mathbf{r} \times m\mathbf{v}$$

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \mathbf{N}$$

ただし一般に角速度 ω と角運動量 $\mathbf{L}$ の向きが一致しないときは

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} + \omega \times \mathbf{L} = \mathbf{N}$$

10　波動

10.1　波の性質

10.1.1　波と媒質

例を挙げよ！

10.1.2　縦波と横波

横波：媒質の振動方向が波の進行方向と垂直
縦波：媒質の振動方向と波の進行方向が一致（疎密波）

10.1.3　波の表し方

10.1.4　波の形

波形（波の形）
山
谷
正弦波
パルス波

10.1.5　波の性質を表す量

振幅：A
振動数（周波数）：f
　　周期：T　　$T = 1/f$
波長：λ
波の速さ：v

$$v = \lambda f = \lambda / T$$

10.1.6　正弦波の式

変位：y

$$y = A \sin \omega \left(t - \frac{x}{v} \right) = A \sin 2\pi f \left(t - \frac{x}{v} \right) = A \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} \right)$$

角振動数：ω

10.1.7　波の速さ

張力：S
線密度：μ

$$v = \sqrt{S/\mu}$$

10.1.8　波のエネルギー

密度：ρ
波の進行方向に垂直な単位面積を単位時間に通過するエネルギー：I

$$I = \frac{1}{2}\rho\omega^2 A^2 v$$

10.1.9　波の重ね合わせの原理と干渉

$$y(\mathbf{r}, t) = y_1(\mathbf{r}, t) + y_2(\mathbf{r}, t)$$

10.1.10　波面

平面波

$$y = A\sin\left(\omega t - \mathbf{k}\cdot\mathbf{r}\right)$$

球面波

$$y = A\sin\left(\omega t - kr\right)/r$$

10.1.11　反射の法則

入射角＝反射角

10.1.12　屈折の法則

入射角：θ_1
屈折角：θ_2

$$\frac{\sin\theta_1}{\sin\theta_2} = \frac{v_1}{v_2} = \frac{\lambda_1}{\lambda_2} = n_{12}$$

媒質 1 に対する媒質 2 の屈折率（相対屈折率）

10.1.13　反射波の位相

境界（端）が $x = 0$ にある場合
入射波：y_I
反射波：y_R
固定端での反射：　$y_R(x,t) = -y_I(-x,t)$
自由端での反射：　$y_R(x,t) = y_I(-x,t)$

10.1.14　定常波

$\leftrightarrow$ 進行波

$$y_I(x,t) = A\sin(\omega t - kx)$$

とする。
$x = 0$ が固定端のとき

$$y_R(x,t) = -A\sin(\omega t + kx)$$

$$y(x,t) = y_I(x,t) + y_R(x,t)$$

$$= A\sin(\omega t - kx) - A\sin(\omega t + kx) = -2A\cos\omega t\sin kx$$

$x = 0$ が自由端のとき

$$y_R(x,t) = A\sin(\omega t + kx)$$

$$y(x,t) = y_I(x,t) + y_R(x,t)$$

$$= A\sin(\omega t - kx) + A\sin(\omega t + kx) = 2A\sin\omega t\cos kx$$

腹：定常波の振幅の最も大きいところ
節：定常波で全く振動しないところ

$$\text{定常波} = \underbrace{\text{入射波} + \text{反射波}}_{\text{干渉}} \tag{231}$$

10.1.15　弦の固有振動

基本振動
倍振動

10.2　音波

縦波

10.2.1　音の 3 要素

高さ … 振動数
強さ … 振幅の 2 乗
音色 … 波形

10.2.2　音波の速さ

気温：t（摂氏）

$$v = 331.45 + 0.607t \text{ [m/s]}$$

10.2.3　気柱の振動

閉管
開管
開口端補正

10.2.4　うなり

単位時間あたりのうなりの回数：n

$$n = |f_1 - f_2|$$

10.2.5　Doppler 効果

教科書参照

10.3　光波

10.3.1　光とは何か

電磁波

10.3.2　光の速さ

$$c = 2.99792458 \times 10^8[\mathrm{m/s}]$$

10.3.3　光の反射と屈折

屈折率

$$n_{12} = n_2/n_1$$

反射率

$$R = \left(\frac{n_2 - n_1}{n_2 + n_1}\right)^2$$

10.3.4　全反射

$n_1 > n_2$ の場合
臨界角：θ_c

$$\sin\theta_c = n_{12} = \frac{n_2}{n_1}$$

$\theta_1 > \theta_c$ のとき全反射が起きる。

10.3.5　光の分散

スペクトル

10.3.6　回折

10.3.7　スリットによる回折

10.3.8　回折格子

11　熱

11.1　熱と温度

11.1.1　熱平衡と温度

熱平衡状態
２つの接触した物体の温度が等しくなる $\rightarrow$ 熱の移動は止まる
熱力学の第 0 法則

11.1.2　熱容量と比熱

熱量：Q
温度：T
熱容量：C

$$C = \frac{\Delta Q}{\Delta T}$$

比熱　物質 1 グラムあたりの熱容量
水 1 グラムの温度を 1 度上昇させるのに必要な熱量は約 1cal。

11.1.3　熱と分子運動

物体の内部エネルギー：U
物体を構成する分子の熱運動の運動エネルギーと位置エネルギーの総和
熱とは，このエネルギーの移動

11.1.4　熱の仕事当量

Joule の実験
仕事：W
熱の仕事当量：b

$$W = bQ$$

b は約 4.2J/cal

11.1.5　熱力学の第 1 法則

熱力学の第 1 法則

$$\Delta U = \Delta Q + \Delta W$$

これはエネルギー保存則である。

11.2　気体の分子運動論

11.2.1　理想気体の状態方程式

理想気体
ボイル-シャルルの法則にしたがう。
圧力：p [N/m^2]
体積：V [m^3]
温度：T [K] （絶対温度）
分子量：n [mol]
気体定数：R

$$pV = nRT$$

R は約 8.31J/mol · K
アボガドロ数：N_A

$$N_A = 6.022 \times 10^{23}$$

11.2.2　気体の分子運動論

$$pV = \frac{1}{3} n N_A m \langle v^2 \rangle$$

ボルツマン定数：k

$$k = R/N_A$$

$$k = 1.38 \times 10^{-23} J/K$$

$$\frac{1}{2} m \langle v^2 \rangle = \frac{3}{2} kT$$

11.2.3　気体の内部エネルギー

単原子分子

$$U = \frac{3}{2}nRT$$

２原子分子

$$U = \frac{5}{2}nRT$$

11.3　いろいろな変化

$$\Delta U = \Delta Q + \Delta W = \Delta U - p\Delta V$$

11.3.1　理想気体の比熱

定積モル比熱：C_V

$$C_V = \frac{\Delta Q}{\Delta T} = \frac{\Delta U}{\Delta T}$$

定圧モル比熱：C_p

$$C_p = \frac{\Delta Q}{\Delta T} = \frac{\Delta U + p\Delta V}{\Delta T}$$

理想気体では

$$C_p = C_V + R$$

11.3.2　定圧変化 $\cdots$ $p =$ 一定

11.3.3　定積変化 $\cdots$ $\Delta V = 0$

$$\Delta U = \Delta Q$$

11.3.4　等温変化 $\cdots$ $T =$ 一定

理想気体の場合，$\Delta U = 0$。

$$\Delta Q = p\Delta V$$

11.3.5　断熱変化 ··· $\Delta Q = 0$

$$\Delta U = -p\Delta V$$

理想気体ではこの式から

$$C_V \frac{\Delta T}{T} = -R\frac{\Delta V}{V}$$

が得られ，

$$TV^{\gamma-1} = \text{一定}$$

が導かれる。ここで $\gamma = (C_V + R)/C_V = C_p/C_V$。

11.4　熱機関と熱力学の第２法則

11.4.1　熱機関

高温熱源と低温熱源

11.4.2　カルノーサイクル

等温膨張 $\rightarrow$ 断熱膨張 $\rightarrow$ 等温圧縮 $\rightarrow$ 断熱圧縮
カルノー機関の効率：e

$$e = \frac{W}{Q_H} = \frac{Q_H - Q_C}{Q_H} = \frac{T_H - T_C}{T_H}$$

11.4.3　カルノーの原理

カルノーサイクルよりも効率のよい熱機関はない。

11.4.4　熱力学の第２法則

可逆過程：エントロピーは変化しない　（例：カルノーサイクル）
不可逆過程：エントロピーは常に増加する

11.5　熱の移動

11.5.1　熱伝導

11.5.2　対流

11.5.3　熱放射