Superfields on a Graph

グラフ理論でいうところの「グラフ」の上の場の理論
＝*Graph Field Theory* を考えます。
グラフの頂点や辺の上に超場(*superfield*)を乗せて
みましょう。

2004年8月21日（土），　By KS

Moose とか Quiver とか
昔からありまして・・・

空間の離散化・・・

Dimensional Deconstruction・・・

Higgsless theory・・・

D-braneとQuiver，M-theory, Matrix theoryと・・・

わたくし，よくわかってないことが多いですが，

みんな**グラフ**と関連

2004年8月21日（土）， By KS

高次元超対称理論の四次元超場による記述・・・

これもグラフに乗っかるといいのではないでしょうか

４次元と高次元のはざまの理論

2004年8月21日（土），　By KS

Graph Laplacian
(*Spectral Graph Theory*)

⇩

"*Translational*" *symmetry* ➡
（（余剰）空間の離散化）

Gauge symmetry ➡
(*Lattice Gauge Theory*)

Supersymmetry ➡

Graph Field Theory

➡ *massless modes*

➡ *scalar fileds and interactions*

➡ *Other Interactions*

⇩

mass hierarchy problem
(*Controlled One-Loop divergences*)

Graph Field Theory の超対称化

1. どうせ高エネルギーでは超対称な何かなのでしょう？

2. いろいろな場のラグランジアンを定める
もっともらしいさぐり方。

Non-interacting Wess-Zumino model

$$y = x + i\theta\sigma\bar{\theta}$$

chiral superfield $\Phi_v = \phi_v(y) + \sqrt{2}\,\theta\psi_v(y) + \theta\theta F_v(y)$

をグラフの頂点に

chiral superfield $\Phi^c_e = \phi^c_e(y) + \sqrt{2}\,\theta\psi^c_e(y) + \theta\theta F^c_e(y)$

をグラフの辺に対応させる。

$$L_{WZ} = \sum_{v\in V} \bar{\Phi}_v \Phi_v \Big|_{\theta\theta\bar{\theta}\bar{\theta}} + \sum_{e\in E} \bar{\Phi}^c_e \Phi^c_e \Big|_{\theta\theta\bar{\theta}\bar{\theta}}$$

$$+ m \sum_{e\in E} \left[\Phi^c_e \left(\Phi_{t(e)} - \Phi_{o(e)} \right) \Big|_{\theta\theta} + h.c. \right]$$

Global symmetry

$$\Phi_v \to e^{-2\Lambda}\Phi_v$$

$$\Phi_e^c \to \Phi_e^c e^{2\Lambda}$$

$$L \sum_{v\in V} \left[-\partial_\mu \phi_v^\dagger \partial^\mu \phi_v - i\psi_v \sigma^\mu \partial_\mu \overline{\psi}_v + \left| F_v \right|^2 \right]$$

$$+ \sum_{e\in E} \left[-\partial_\mu \phi_e^{c\dagger} \partial^\mu \phi_e^c - i\psi_e^c \sigma^\mu \partial_\mu \overline{\psi}_e^c + \left| F_e^c \right|^2 \right]$$

$$+ m \sum_{e\in E} \left[-\phi_e^c (E^T F)_e - F_e^c (E^T \phi)_e + \psi_e^c (E^T \psi)_e + h.c. \right]$$

補助場を消去すると

$$\sum_{v\in V}\left[-\partial_\mu \phi_v^\dagger \partial^\mu \phi_v - m^2 \phi_v^\dagger (EE^T\phi)_v\right]$$

$$+\sum_{e\in E}\left[-\partial_\mu \phi_e^{c\dagger} \partial^\mu \phi_e^c - m^2 \phi_e^{c\dagger} (E^T E\phi^c)_e\right]$$

$$+\sum_{v\in V}\left[-i\psi_v \sigma^\mu \partial_\mu \overline{\psi}_v\right]+\sum_{e\in E}\left[-i\psi_e^c \sigma^\mu \partial_\mu \overline{\psi}_e^c\right]$$

$$+m\sum_{e\in E}\left[\psi_e^c (E^T\psi)_e + \overline{\psi}_e^c (E^T\overline{\psi})_e\right]$$

Abelian vector field

$$V_v = -\theta\sigma_\mu\bar{\theta}A^\mu_v + i\theta\theta\bar{\theta}\bar{\lambda}_v - i\bar{\theta}\bar{\theta}\theta\lambda_v + \frac{1}{2}\theta\theta\bar{\theta}\bar{\theta}D_v$$

を各頂点におく。

一方，辺上にchiral superfieldを設定。

$$S_e = \frac{\rho_e + ia_e}{2} - i\theta\chi_e + i\theta\sigma_\mu\bar{\theta}\partial^\mu\frac{\rho_e + ia_e}{2} + \theta\theta F_{Se}$$

$$+\frac{1}{2}\theta\theta\bar{\theta}\bar{\sigma}_\mu\partial^\mu\chi_e + \frac{1}{4}\theta\theta\bar{\theta}\bar{\theta}\partial^2\frac{\rho_e + ia_e}{2}$$

頂点をつなぐ辺・・・Stueckelberg term

$$L_S = \sum_{e \in E} \left(V_{t(e)} - V_{o(e)} - S_e - \overline{S}_e \right)^2 \Big|_{\theta\theta\overline{\theta}\overline{\theta}}$$

$$\sum_{e \in E} \left[-\frac{1}{2} \left(E^T A^\mu + \partial^\mu a \right)_e^2 + \chi_e \left(E^T \lambda \right)_e + \overline{\chi}_e \left(E^T \overline{\lambda} \right)_e \right]$$

$$+ \sum_{e \in E} \left[2 \left| F_{Se} \right|^2 - i \chi_e \sigma^\mu \partial_\mu \overline{\chi}_e - \frac{1}{2} \left(\partial^\mu \rho \right)_e^2 + \rho_e \left(E^T D \right)_e \right]$$

頂点上のkinetic term

$$L_v = \sum_{v \in V} \frac{1}{16 g^2} \left(WW \big|_{\theta\theta} + \overline{WW} \big|_{\bar{\theta}\bar{\theta}} \right), \quad W_\alpha = -\frac{1}{4} \overline{DD} e^{-2V} D_\alpha e^{2V}$$

といっしょに， $L = L_v + v^2 L_S$ とし， $S_e \to S_e / v$ ， $V_v \to g V_v$ とrescale

$$L \quad -\frac{1}{4}\sum_{v\in V} F_v^{\mu\nu} F_{\mu\nu v} - \frac{1}{2} g^2 v^2 \sum_{e\in E} \left(E^T A^\mu + \frac{1}{gv}\partial^\mu a\right)_e^2$$

$$+\sum_{v\in V}\left[-i\lambda_v \sigma^\mu \partial_\mu \overline{\lambda}_v\right] + \sum_{e\in E}\left[-i\chi_e \sigma^\mu \partial_\mu \overline{\chi}_e\right]$$

$$+gv\sum_{e\in E}\left[\chi_e \left(E^T \lambda\right)_e + \overline{\chi}_e \left(E^T \overline{\lambda}\right)_e\right]$$

$$+\sum_{e\in E}\left[-\frac{1}{2}\left(\partial^\mu \rho\right)_e^2 - \frac{1}{2}\rho_e \left(E^T E\rho\right)_e + 2\left|F_{Se}\right|^2\right]$$

$$+\sum_{v\in V}\left[\frac{1}{2}\left(D+gvE\rho\right)_v^2\right]$$

Abelian gauge coupling to matter

Local symmetry　（グラフの各頂点）

$$\Phi_v \to e^{-2\Lambda_v}\Phi_v\,,\quad \Phi^c_e \to \Phi^c_e\, e^{2\Lambda_{o(e)}}$$

$$L_{WZ} = \sum_{v\in V} \overline{\Phi}_v\, e^{2gV_v}\,\Phi_v \Big|_{\theta\theta\overline{\theta}\overline{\theta}} + \sum_{e\in E} \overline{\Phi}^c_e\, e^{-2gV_{o(e)}}\,\Phi^c_e \Big|_{\theta\theta\overline{\theta}\overline{\theta}}$$
$$+ m\sum_{e\in E}\left[\,\Phi^c_e\left(e^{2S_e/v}\,\Phi_{t(e)} - \Phi_{o(e)}\right)\Big|_{\theta\theta} + h.c.\right]$$

$$L \sum_{v\in V}\left[-\partial_\mu \phi_v^\dagger \partial^\mu \phi_v - i\psi_v \sigma^\mu D_\mu \overline{\psi}_v - i\sqrt{2}g(\phi_v \overline{\lambda}_v \overline{\psi}_v - \phi_v^\dagger \lambda_v \psi_v)\right]$$

$$+\sum_{v\in V}\left[\left|F_v\right|^2 + gD_v\left|\phi_v\right|^2\right]$$

$$+\sum_{e\in E}\left[-\partial_\mu \phi_e^{c\dagger} \partial^\mu \phi_e^c - i\psi_e^c \sigma^\mu D_\mu \overline{\psi}_e^c + i\sqrt{2}g(\phi_e^c \overline{\lambda}_{o(e)} \overline{\psi}_e^c - \phi_e^{c\dagger} \lambda_{o(e)} \psi_e^c)\right]$$

$$+\sum_{e\in E}\left[\left|F_e^c\right|^2 - gD_{o(e)}\left|\phi_e^c\right|^2\right]$$

$$+m\sum_{e\in E}\left[-\phi_e^c(\hat{E}^\dagger F)_e - F_e^c(\hat{E}^\dagger \phi)_e + \psi_e^c(\hat{E}^\dagger \psi)_e + h.c.\right]$$

$$+\frac{m}{v}\sum_{e\in E}\left\{e^{(\rho_e + i a_e)/v}\left[i\sqrt{2}(\chi_e \psi_e^c \phi_{t(e)} + \phi_e^c \chi_e \psi_{t(e)}) + \phi_e^c \phi_{t(e)}(2F_{Se} + \chi_e \chi_e / v)\right] + h.c.\right\}$$

2004年8月21日（土）， By KS

$$D^{\mu}\phi_{v}=(\partial^{\mu}+igA^{\mu}_{v})\phi_{v}$$

$$D^{\mu}\psi_{v}=(\partial^{\mu}+igA^{\mu}_{v})\psi_{v}$$

$$D^{\mu}\phi^{c}_{e}=(\partial^{\mu}-igA^{\mu}_{o(e)})\phi^{c}_{e}$$

$$D^{\mu}\psi^{c}_{e}=(\partial^{\mu}-igA^{\mu}_{o(e)})\psi^{c}_{e}$$

$$(\hat{E})_{ve}=\begin{cases} 1 & if\ v=o(e) \\ -e^{(\rho-ia)_{e}/v} & if\ v=t(e) \\ 0 & otherwise \end{cases}$$

D-term (Fayet-Iliopoulos) breaking

$$L_{FI} = \sum_{v \in V} \zeta_v D_v$$

SUSY breaking
modifying mass spectra (no massless modes)

non-Abelian vector field

よく知られたゲージ変換

$$e^{2V_v} \to e^{2\overline{\Lambda}_v} e^{2V_v} e^{2\Lambda_v}$$

と，"adjoint"的chiral superfield

$$\Sigma_e \to e^{-2\Lambda_{t(e)}} \Sigma_e e^{2\Lambda_{d(e)}}$$

$$\Sigma_e = U_e - 2i\theta\chi_{\Sigma e} + i\theta\sigma_\mu\overline{\theta}\partial^\mu U_e + \theta\theta F_{\Sigma e} + \theta\theta\overline{\theta}\overline{\sigma}^\mu\partial_\mu\chi_{\Sigma e} + \frac{1}{4}\theta\theta\overline{\theta}\overline{\theta}\partial^2 U_e$$

$$\sum_{e\in E} Tr\left(\overline{\Sigma}_e e^{2V_{t(e)}} \Sigma_e e^{-2V_{o(e)}} \Big|_{\theta\theta\overline{\theta}\overline{\theta}} \right)$$

$$\sum_{e\in E} Tr\Big[-(D_\mu U)^\dagger_e (D^\mu U)_e + U^\dagger_e D_{t(e)} U_e - U_e D_{o(e)} U^\dagger_e + \left| F_{\Sigma e} \right|^2$$

$$-2i\overline{\chi}_{\Sigma e}\overline{\sigma}^\mu D_\mu \chi_{\Sigma e} + 2\chi_{\Sigma e}(U^\dagger_{\Sigma e}\lambda_{t(e)} - \lambda_{o(e)} U^\dagger_e) + 2\overline{\chi}_{\Sigma e}(\overline{\lambda}_{t(e)} U_e - U_e \overline{\lambda}_{o(e)}) \Big]$$

$$D^\mu U_e = \partial^\mu U_e + iA^\mu_{t(e)} U_e - iU_e A^\mu_{o(e)}$$

$$D^\mu \chi_{\Sigma e} = \partial^\mu \chi_{\Sigma e} + iA^\mu_{t(e)} \chi_{\Sigma e} - i\chi_{\Sigma e} A^\mu_{o(e)}$$

2004年8月21日（土）， By KS

"fundamental"

$$\Phi_v \to e^{-2\Lambda_v}\Phi_v\,,\quad \Phi_e^c \to \Phi_e^c\, e^{2\Lambda_{t(e)}}$$

$$\Phi_e^c(\Phi_{t(e)} - \Sigma_e \Phi_{o(e)}) + h.c.$$

"adjoint"

$$\Phi_v \to e^{-2\Lambda_v}\Phi_v\, e^{2\Lambda_v}\,,\quad \Phi_e^c \to e^{-2\Lambda_{o(e)}}\Phi_e^c\, e^{2\Lambda_{t(e)}}$$

$$Tr\,\Phi_e^c(\Phi_{t(e)}\Sigma_e - \Sigma_e \Phi_{o(e)}) + h.c.$$

まとめ

地道に作りました。

これから

non-linear sigma model
(constraint or log(...))

symmetry breaking, including quantum effects

使えるモデル　種々の群