

# 電磁気学 (extra)

白石 清 (山口大学理学部)

1999年06月24日改訂

概要

## 目次

<b>1</b>	<b>運動する荷電粒子のつくる電磁場</b>	<b>3</b>
1.1	Liénard-Wiechert potential . . . . .	3
1.2	電場と磁場 . . . . .	4
1.2.1	準備：2つの「時間」のある場合の「微分」(1) . . . . .	4
1.2.2	準備： $\frac{\partial t'}{\partial t}$ . . . . .	4
1.2.3	準備： $\nabla t'$ . . . . .	5
1.2.4	準備：2つの「時間」のある場合の「微分」(2) . . . . .	6
1.2.5	電場 . . . . .	7
1.2.6	磁場 . . . . .	8
1.2.7	電磁場のまとめ . . . . .	9
1.3	ポインティングベクトル . . . . .	10
1.3.1	遠方での輻射場の評価 . . . . .	10
1.3.2	速度の遅い場合の発生電力 . . . . .	11
1.3.3	輻射の電力（一般の場合） . . . . .	12
<b>2</b>	<b>さまざまな輻射</b>	<b>12</b>
2.1	制動輻射 . . . . .	12
2.2	サイクロトロン輻射 . . . . .	13
2.3	シンクロトロン輻射 . . . . .	13
<b>3</b>	<b>4-vector および tensor による記述</b>	<b>14</b>
3.1	gauge field and field strength . . . . .	14
3.2	Maxwell equation . . . . .	15
3.3	conservation of current . . . . .	15
3.4	gauge transformation . . . . .	16
3.5	gauge condition . . . . .	16
3.6	dual tensor . . . . .	16
3.7	invariant . . . . .	16
3.8	action . . . . .	17
3.9	differential form . . . . .	17

# 1 運動する荷電粒子のつくる電磁場

## 1.1 Liénard-Wiechert potential

まず、時間に依存する（ゲージ）ポテンシャルの解は、

$$\phi(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\rho(\mathbf{r}', t - R/c)}{R} d^3\mathbf{r}' \quad (1)$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}', t - R/c)}{R} d^3\mathbf{r}' \quad (2)$$

ここで  $R \equiv |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$  である。

さて、まず原点に荷電粒子  $q$  があるとしよう。その速度ベクトルを  $\mathbf{v}$  とする。

観測点  $\mathbf{r} = R$  では、もし荷電粒子が止まっていれば

$$\phi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r} \quad (3)$$

となる。電荷が動いているとすると、その影響が伝わるのに  $r/c$  の時間がかかる。その間に、電荷と観測点の距離はだいたい

$$r - \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{v}}{c} \quad (4)$$

となるであろう。したがって

$$\phi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r} \frac{q}{1 - \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{v}}{rc}} \quad (5)$$

となることが期待される。同様に

$$\mathbf{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{1}{r} \frac{q\mathbf{v}}{1 - \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{v}}{rc}} \quad (6)$$

となることが期待される。

もっと完全な形は、Liénard-Wiechert potential とよばれ、次のようになる。

$$\phi(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{R} \frac{q}{1 - \frac{\mathbf{R} \cdot \mathbf{v}}{Rc}} \quad (7)$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{1}{R} \frac{q\mathbf{v}}{1 - \frac{\mathbf{R} \cdot \mathbf{v}}{Rc}} \quad (8)$$

ここで荷電粒子  $q$  は  $\mathbf{r}'(t')$  の位置にあり,

$$\mathbf{v}(t') = \frac{d}{dt'} \mathbf{r}'(t') \quad (9)$$

$$\mathbf{R} = \mathbf{r} - \mathbf{r}'(t') \quad (10)$$

$$t' = t - \frac{R}{c} \quad (11)$$

である。

## 1.2 電場と磁場

### 1.2.1 準備：2つの「時間」のある場合の「微分」(1)

まず，時間座標の偏微分は

$$\frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial t'}{\partial t} \frac{\partial}{\partial t'} \quad (12)$$

として扱えばよい。

気をつけるのは，空間座標の微分。

一般に，次のように考える。

$$\nabla f = \nabla^* f + (\nabla t') \frac{\partial f}{\partial t'} \quad (13)$$

$$\nabla \times \mathbf{V} = \nabla^* \times \mathbf{V} + (\nabla t') \times \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t'} \quad (14)$$

ここで  $\nabla^*$  は， $t'$  を一定としたときの，空間座標の微分を表す。

### 1.2.2 準備： $\frac{\partial t'}{\partial t}$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{\partial R^2}{\partial t} &= R \frac{\partial R}{\partial t} \\ &= \mathbf{R} \cdot \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial t} \\ &= \mathbf{R} \cdot \frac{\partial (\mathbf{r} - \mathbf{r}'(t'))}{\partial t} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -\mathbf{R} \cdot \left( \frac{\partial t'}{\partial t} \frac{\partial \mathbf{r}'(t')}{\partial t'} \right) \\
&= -\mathbf{R} \cdot \mathbf{v} \frac{\partial t'}{\partial t}
\end{aligned} \tag{15}$$

一方,

$$R = c(t - t') \tag{16}$$

より,

$$\frac{\partial R}{\partial t} = c \left( 1 - \frac{\partial t'}{\partial t} \right) \tag{17}$$

したがって,

$$\frac{\partial t'}{\partial t} = \frac{R}{R - \frac{\mathbf{R} \cdot \mathbf{v}}{c}} = \frac{1}{1 - \frac{\mathbf{R} \cdot \mathbf{v}}{Rc}} \tag{18}$$

### 1.2.3 準備 : $\nabla t'$

同様に

$$\begin{aligned}
R \frac{\partial R}{\partial x} &= \mathbf{R} \cdot \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial x} \\
&= (x - x') - \mathbf{R} \cdot \mathbf{v} \frac{\partial t}{\partial x}
\end{aligned} \tag{19}$$

一方

$$R = c(t - t') \tag{20}$$

より,

$$\frac{\partial R}{\partial x} = -c \frac{\partial t'}{\partial x} \tag{21}$$

したがって

$$\frac{\partial t'}{\partial x} = -\frac{x - x'}{c \left( R - \frac{\mathbf{R} \cdot \mathbf{v}}{c} \right)} \tag{22}$$

すなわち

$$\nabla t' = -\frac{\mathbf{R}}{c \left( R - \frac{\mathbf{R} \cdot \mathbf{v}}{c} \right)} \tag{23}$$

#### 1.2.4 準備：2つの「時間」のある場合の「微分」(2)

以上より,

$$\frac{\partial}{\partial t} = \frac{R}{R - \frac{\mathbf{R} \cdot \mathbf{v}}{c}} \frac{\partial}{\partial t'} \quad (24)$$

$$\nabla f = \nabla^* f - \frac{\mathbf{R}}{c \left( R - \frac{\mathbf{R} \cdot \mathbf{v}}{c} \right)} \frac{\partial f}{\partial t'} \quad (25)$$

$$\nabla \times \mathbf{V} = \nabla^* \times \mathbf{V} - \frac{\mathbf{R}}{c \left( R - \frac{\mathbf{R} \cdot \mathbf{v}}{c} \right)} \times \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t'} \quad (26)$$

ここで $\nabla^*$ は、 $t'$ を一定としたときの、空間座標の微分を表す。

$$s \equiv R - \frac{\mathbf{R} \cdot \mathbf{v}}{c} \quad (27)$$

を定義すると,

$$\frac{\partial}{\partial t} = \frac{R}{s} \frac{\partial}{\partial t'} \quad (28)$$

$$\nabla f = \nabla^* f - \frac{\mathbf{R}}{cs} \frac{\partial f}{\partial t'} \quad (29)$$

$$\nabla \times \mathbf{V} = \nabla^* \times \mathbf{V} - \frac{\mathbf{R}}{cs} \times \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t'} \quad (30)$$

と書ける。

ex.

$$\nabla^* s = \frac{\mathbf{R}}{R} - \frac{\mathbf{v}}{c} \quad (31)$$

$$\frac{\partial s}{\partial t'} = -\frac{\mathbf{R} \cdot \mathbf{v}}{R} + \frac{v^2}{c} - \frac{\mathbf{R}}{c} \cdot \frac{d\mathbf{v}}{dt'} \quad (32)$$

### 1.2.5 電場

Liénard-Wiechert potential は

$$\phi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{s} \quad (33)$$

$$\mathbf{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{q\mathbf{v}}{s} \quad (34)$$

と書けるので,

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= -\nabla\phi - \frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t} \\ &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{s^2} \nabla s + \frac{\mu_0 q}{4\pi} \left( \frac{\mathbf{v}}{s^2} \frac{\partial s}{\partial t} - \frac{1}{s} \frac{\partial\mathbf{v}}{\partial t} \right) \\ &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{s^2} \nabla s + \frac{1}{c^2} \frac{\mathbf{v}}{s^2} \frac{\partial s}{\partial t} - \frac{1}{c^2} \frac{1}{s} \frac{\partial\mathbf{v}}{\partial t} \right) \\ &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{s^2} \nabla^* s - \frac{\mathbf{R}}{cs^3} \frac{\partial s}{\partial t'} + \frac{R\mathbf{v}}{c^2 s^3} \frac{\partial s}{\partial t'} - \frac{R}{c^2 s^2} \frac{\partial\mathbf{v}}{\partial t'} \right) \end{aligned} \quad (35)$$

よって

$$\begin{aligned} \mathbf{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} & \left[ \frac{1}{s^2} \left( \frac{\mathbf{R}}{R} - \frac{\mathbf{v}}{c} \right) \right. \\ & - \frac{1}{cs^3} \left( \mathbf{R} - R \frac{\mathbf{v}}{c} \right) \left( -\frac{\mathbf{R} \cdot \mathbf{v}}{R} + \frac{\mathbf{v}^2}{c} - \frac{\mathbf{R}}{c} \cdot \frac{d\mathbf{v}}{dt'} \right) \\ & \left. - \frac{R}{c^2 s^2} \frac{\partial\mathbf{v}}{\partial t'} \right] \end{aligned} \quad (36)$$

と書ける。

この形を書き直してみる。(あとの磁場との比較が容易になる。)

まずまとめなおして

$$\begin{aligned} \mathbf{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} & \left[ \frac{1}{s^2 R} \left( \mathbf{R} - R \frac{\mathbf{v}}{c} \right) \right. \\ & + \left( \mathbf{R} - R \frac{\mathbf{v}}{c} \right) \left( -\frac{\mathbf{v}^2}{c^2 s^3} + \frac{\mathbf{R} \cdot \mathbf{v}}{Rcs^3} \right) \\ & \left. + \left( \mathbf{R} - R \frac{\mathbf{v}}{c} \right) \frac{1}{c^2 s^3} \mathbf{R} \cdot \frac{d\mathbf{v}}{dt'} - \frac{R}{c^2 s^2} \frac{\partial\mathbf{v}}{\partial t'} \right] \end{aligned} \quad (37)$$

次のものを計算してみる。

$$\begin{aligned}
& \mathbf{R} \times \left[ \left( \mathbf{R} - R \frac{\mathbf{v}}{c} \right) \times \frac{d\mathbf{v}}{dt'} \right] \\
&= \mathbf{R} \cdot \frac{d\mathbf{v}}{dt'} \left( \mathbf{r} - R \frac{\mathbf{v}}{c} \right) - \left( R^2 - R \frac{\mathbf{R} \cdot \mathbf{v}}{c} \right) \frac{d\mathbf{v}}{dt'} \\
&= \left( \mathbf{r} - R \frac{\mathbf{v}}{c} \right) \mathbf{R} \cdot \frac{d\mathbf{v}}{dt'} - R \left( R - \frac{\mathbf{R} \cdot \mathbf{v}}{c} \right) \frac{d\mathbf{v}}{dt'} \tag{38}
\end{aligned}$$

これを用いると

$$\begin{aligned}
\mathbf{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} & \left\{ \left( \mathbf{R} - R \frac{\mathbf{v}}{c} \right) \left( \frac{1}{s^2 R} - \frac{\mathbf{v}^2}{c^2 s^3} + \frac{\mathbf{R} \cdot \mathbf{v}}{R c s^3} \right) \right. \\
& \left. + \frac{1}{c^2 s^3} \mathbf{R} \times \left[ \left( \mathbf{R} - R \frac{\mathbf{v}}{c} \right) \times \frac{d\mathbf{v}}{dt'} \right] \right\} \tag{39}
\end{aligned}$$

最後に

$$\frac{\mathbf{R} \cdot \mathbf{v}}{R c s^3} = \frac{R - s}{R s^3} = \frac{1}{s^3} - \frac{1}{R s^2} \tag{40}$$

を用いると,

$$\begin{aligned}
\mathbf{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} & \left\{ \frac{1}{s^3} \left( 1 - \frac{\mathbf{v}^2}{c^2} \right) \left( \mathbf{R} - R \frac{\mathbf{v}}{c} \right) \right. \\
& \left. + \frac{1}{c^2 s^3} \mathbf{R} \times \left[ \left( \mathbf{R} - R \frac{\mathbf{v}}{c} \right) \times \frac{d\mathbf{v}}{dt'} \right] \right\} \tag{41}
\end{aligned}$$

### 1.2.6 磁場

$$\begin{aligned}
\mathbf{B} &= \nabla \times \mathbf{A} \\
&= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{c^2} \nabla \times \frac{\mathbf{v}}{s} \\
&= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{c^2} \left( \frac{\mathbf{v}}{s^2} \times \nabla s + \frac{1}{s} \nabla \times \mathbf{v} \right) \\
&= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{c^2} \left( \frac{\mathbf{v}}{s^2} \times \nabla^* s - \frac{\mathbf{v}}{c s^3} \times \mathbf{R} \frac{\partial s}{\partial t'} - \frac{\mathbf{R}}{c s^2} \times \frac{d\mathbf{v}}{dt'} \right) \tag{42}
\end{aligned}$$

したがって

$$\mathbf{B} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{c^2} \left[ \frac{\mathbf{v}}{s^2} \times \left( \frac{\mathbf{R}}{R} - \frac{\mathbf{v}}{c} \right) - \frac{\mathbf{v}}{cs^3} \times \mathbf{R} \left( -\frac{\mathbf{R} \cdot \mathbf{v}}{R} + \frac{v^2}{c} - \frac{\mathbf{R}}{c} \cdot \frac{d\mathbf{v}}{dt'} \right) - \frac{\mathbf{R}}{cs^2} \times \frac{d\mathbf{v}}{dt'} \right] \quad (43)$$

すなわち（ほとんど同じだが）

$$\mathbf{B} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{c^2} \left[ \frac{\mathbf{v}}{s^2} \times \frac{\mathbf{R}}{R} - \frac{\mathbf{v}}{cs^3} \times \mathbf{R} \left( -\frac{\mathbf{R} \cdot \mathbf{v}}{R} + \frac{v^2}{c} - \frac{\mathbf{R}}{c} \cdot \frac{d\mathbf{v}}{dt'} \right) - \frac{\mathbf{R}}{cs^2} \times \frac{d\mathbf{v}}{dt'} \right] \quad (44)$$

ここで止めておいて、(36)の式から

$$\frac{\mathbf{R} \times \mathbf{E}}{Rc} \quad (45)$$

を計算してみると、

$$\frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{Rc} \left[ -\frac{\mathbf{R} \times \mathbf{v}}{cs^2} + \frac{R}{c^2 s^3} \mathbf{R} \times \mathbf{v} \left( -\frac{\mathbf{R} \cdot \mathbf{v}}{R} + \frac{v^2}{c} - \frac{\mathbf{R}}{c} \cdot \frac{d\mathbf{v}}{dt'} \right) - \frac{R}{cs^2} \mathbf{R} \times \frac{d\mathbf{v}}{dt'} \right] \quad (46)$$

これは少し整理すれば、(44)と同じであることがわかる。

### 1.2.7 電磁場のまとめ

運動する荷電粒子のつくる電磁場は

$$\mathbf{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left\{ \frac{1}{s^3} \left( 1 - \frac{v^2}{c^2} \right) \left( \mathbf{R} - R \frac{\mathbf{v}}{c} \right) + \frac{1}{c^2 s^3} \mathbf{R} \times \left[ \left( \mathbf{R} - R \frac{\mathbf{v}}{c} \right) \times \frac{d\mathbf{v}}{dt'} \right] \right\} \quad (47)$$

((一般には) 遠方では第 2 項の方が効くことに注意。)

$$\mathbf{B} = \frac{\mathbf{R} \times \mathbf{E}}{Rc} \quad (48)$$

ただし

$$s = R - \frac{\mathbf{R} \cdot \mathbf{v}}{c} \quad (49)$$

### 1.3 ポインティングベクトル

#### 1.3.1 遠方での輻射場の評価

$$\begin{aligned} \frac{1}{\mu_0} \mathbf{E} \times \mathbf{B} &= \frac{1}{\mu_0} \mathbf{E} \times \frac{\mathbf{R} \times \mathbf{E}}{Rc} \\ &= \underbrace{\frac{1}{\mu_0} |\mathbf{E}|^2 \frac{\mathbf{R}}{Rc}}_{(1)} - \underbrace{\frac{1}{\mu_0} \frac{\mathbf{E} \cdot \mathbf{R}}{Rc} \mathbf{E}}_{(2)} \end{aligned} \quad (50)$$

$$\begin{aligned} (1) &= \frac{1}{\mu_0} \left( \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \right)^2 \frac{\mathbf{R}}{Rc} \left\{ \frac{1}{s^6} \left( 1 - \frac{v^2}{c^2} \right)^2 \left( \mathbf{R} - R \frac{\mathbf{v}}{c} \right)^2 \right. \\ &\quad \left. - 2 \frac{1}{c^2 s^6} \left( 1 - \frac{v^2}{c^2} \right) \frac{R\mathbf{v}}{c} \times \left( \mathbf{R} \times \left[ \left( \mathbf{R} - \frac{R\mathbf{v}}{c} \right) \times \frac{d\mathbf{v}}{dt'} \right] \right) \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{c^4 s^6} \left| \mathbf{R} \times \left[ \left( \mathbf{R} - \frac{R\mathbf{v}}{c} \right) \times \frac{d\mathbf{v}}{dt'} \right] \right|^2 \right\} \end{aligned} \quad (51)$$

十分遠方では

$$\begin{aligned} (1) &= \frac{1}{\mu_0} \left( \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \right)^2 \frac{\mathbf{R}}{Rc} \frac{1}{c^4 s^6} \left| \mathbf{R} \times \left[ \left( \mathbf{R} - \frac{R\mathbf{v}}{c} \right) \times \frac{d\mathbf{v}}{dt'} \right] \right|^2 \\ &= O(R^4/s^6) \approx O(1/R^2) \end{aligned} \quad (52)$$

$$\begin{aligned} (2) &= \frac{1}{\mu_0} \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \mathbf{E} \frac{1}{Rc} \frac{1}{s^3} \left( 1 - \frac{v^2}{c^2} \right) \left( R^2 - R \frac{\mathbf{R} \cdot \mathbf{v}}{c} \right) \\ &= \frac{1}{\mu_0} \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{c} \frac{1}{s^2} \left( 1 - \frac{v^2}{c^2} \right) \mathbf{E} \end{aligned} \quad (53)$$

十分遠方では、 $\mathbf{E} = O(R^2/s^3)$  なので

$$(2) = O(R^2/s^5) \approx O(1/R^3) \quad (54)$$

結局、十分遠方では

$$\mathbf{S} \approx \frac{q^2}{16\pi^2\epsilon_0c^3} \frac{1}{s^6} \left| \mathbf{R} \times \left[ \left( \mathbf{R} - \frac{R\mathbf{v}}{c} \right) \times \frac{d\mathbf{v}}{dt'} \right] \right|^2 \frac{\mathbf{R}}{R} \quad (55)$$

### 1.3.2 速度の遅い場合の発生電力

$$\frac{v}{c} \ll 1 \quad (56)$$

$$\mathbf{S} \approx \frac{q^2}{16\pi^2\epsilon_0c^3} \frac{1}{R^6} \left| \mathbf{R} \times \left( \mathbf{R} \times \frac{d\mathbf{v}}{dt'} \right) \right|^2 \frac{\mathbf{R}}{R} \quad (57)$$

ここで

$$\mathbf{R} \times \left( \mathbf{R} \times \frac{d\mathbf{v}}{dt'} \right) = \left( \mathbf{R} \cdot \frac{d\mathbf{v}}{dt'} \right) \mathbf{R} - R^2 \frac{d\mathbf{v}}{dt'} \quad (58)$$

を使うと

$$\begin{aligned} \mathbf{S} &\approx \frac{q^2}{16\pi^2\epsilon_0c^3} \frac{1}{R^6} \left[ \left( \mathbf{R} \cdot \frac{d\mathbf{v}}{dt'} \right)^2 R^2 - 2 \left( \mathbf{R} \cdot \frac{d\mathbf{v}}{dt'} \right)^2 R^2 + R^4 \left( \frac{d\mathbf{v}}{dt'} \right)^2 \right] \frac{\mathbf{R}}{R} \\ &= \frac{q^2}{16\pi^2\epsilon_0c^3} \frac{1}{R^2} \left[ \left( \frac{d\mathbf{v}}{dt'} \right)^2 - \left( \frac{\mathbf{R}}{R} \cdot \frac{d\mathbf{v}}{dt'} \right)^2 \right] \frac{\mathbf{R}}{R} \end{aligned} \quad (59)$$

これは、 $\frac{d\mathbf{v}}{dt'}$  に垂直な方向に強い輻射があることを表す。

### 輻射の電力

$$\begin{aligned} W &= \int_{R \rightarrow \infty} d^2\Omega R^2 \frac{\mathbf{R}}{R} \cdot \mathbf{S} \\ &= \frac{q^2}{16\pi^2\epsilon_0c^3} \int d^2\Omega \left( \delta^{ij} - n^i n^j \right) \dot{v}^i \dot{v}^j \end{aligned} \quad (60)$$

$$\int d^2\Omega = 4\pi, \quad \int d^2\Omega n^i n^j = \frac{4\pi}{3} \delta^{ij} \quad (61)$$

なので

$$W = \frac{q^2}{6\pi\epsilon_0c^3} |\dot{\mathbf{v}}|^2 \quad (62)$$

### 1.3.3 輻射の電力 (一般の場合)

$$\mathbf{S} = \frac{1}{\mu_0} \mathbf{E} \times \mathbf{B} \quad (63)$$

$$\begin{aligned} \frac{dW}{d\Omega} d\Omega dt' &= S_R R^2 d\Omega dt \\ &= S_R R^2 \frac{dt}{dt'} d\Omega dt' \\ &= S_R R s d\Omega dt' \end{aligned} \quad (64)$$

ゆえに単位立体角当たりの輻射の電力は

$$\frac{dW}{d\Omega} = \frac{q^2}{16\pi^2 \epsilon_0 c^3} \frac{R}{s^5} \left| \mathbf{R} \times \left[ \left( \mathbf{R} - \frac{R\mathbf{v}}{c} \right) \times \frac{d\mathbf{v}}{dt'} \right] \right|^2 \quad (65)$$

したがって<sup>1</sup>

$$W = \frac{q^2}{6\pi \epsilon_0 c^3} \frac{|\dot{\mathbf{v}}|^2 - \frac{|\mathbf{v} \times \dot{\mathbf{v}}|^2}{c^2}}{(1 - \beta^2)^3} \quad (66)$$

## 2 さまざまな輻射

### 2.1 制動輻射

$\dot{\mathbf{v}}$  と  $\mathbf{v}$  が平行な場合。

一般に、輻射場は十分遠方で

$$\mathbf{S} = \frac{q^2}{16\pi^2 \epsilon_0 c^3} \frac{1}{s^6} \left| \mathbf{R} \times \left[ \left( \mathbf{R} - \frac{R\mathbf{v}}{c} \right) \times \frac{d\mathbf{v}}{dt'} \right] \right|^2 \frac{\mathbf{R}}{R} \quad (67)$$

を与える。今は、 $\mathbf{v} \times \dot{\mathbf{v}} = 0$  なので

$$\mathbf{S} = \frac{q^2}{16\pi^2 \epsilon_0 c^3} \frac{1}{s^6} |\mathbf{R} \times (\mathbf{R} \times \dot{\mathbf{v}})|^2 \frac{\mathbf{R}}{R} \quad (68)$$

したがって

$$\begin{aligned} \frac{dW}{d\Omega} &= \frac{q^2}{16\pi^2 \epsilon_0 c^3} \frac{R}{s^5} |\mathbf{R} \times (\mathbf{R} \times \dot{\mathbf{v}})|^2 \\ &= \frac{q^2}{16\pi^2 \epsilon_0 c^3} \frac{\sin^2 \theta}{\left(1 - \frac{v}{c} \cos \theta\right)^5} \dot{\mathbf{v}}^2 \end{aligned} \quad (69)$$

速度が大きいときは、前方に強い輻射。

<sup>1</sup> なんか本を読んで!

## 2.2 サイクロトロン輻射

$\dot{\mathbf{v}}$  と  $\mathbf{v}$  が垂直な場合。

なおかつ、速度は比較的小さい場合。

速度は小さいので

$$\frac{dW}{d\Omega} = \frac{q^2}{16\pi^2\epsilon_0c^3} \frac{1}{R^4} |\mathbf{R} \times (\mathbf{R} \times \dot{\mathbf{v}})|^2 \quad (70)$$

粒子は半径  $a$  の円軌道を角速度  $\omega$  で等速運動しているとする。

$\dot{\mathbf{v}} = -\omega^2 \mathbf{r}'$  である。

また、 $r \gg a$  のとき、 $\mathbf{R} \approx \mathbf{r}$

$$|\mathbf{r} \times (\mathbf{r} \times \mathbf{r}')|^2 = a^2 r^4 (1 - \cos^2 \Theta) \quad (71)$$

であることを使って、( $\Theta$  は  $\mathbf{r}$  と  $\mathbf{r}'$  のなす角) 軌道運動の平均をとると、

$$\frac{dW}{d\Omega} = \frac{q^2 a^2 \omega^4}{16\pi^2 \epsilon_0 c^3} \frac{1 + \cos^2 \theta}{2} \quad (72)$$

ただし、 $\theta$  は軌道面に垂直な方向から測った角度。

## 2.3 シンクロトロン輻射

$\dot{\mathbf{v}}$  と  $\mathbf{v}$  が垂直な場合。

なおかつ、速度は比較的大きい場合。

### 3 4-vector および tensor による記述

#### 3.1 gauge field and field strength

gauge field:

$$A_\mu = \left( -\frac{\phi}{c}, \mathbf{A} \right) = \left( -\frac{\phi}{c}, A_i \right) \quad (73)$$

field strength:

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu \quad (74)$$

ここで

$$\mu, \nu = 0, 1, 2, 3, \quad i, j = 1, 2, 3 \quad (75)$$

$$x^0 = ct, \quad x^1 = x, \quad x^2 = y, \quad x^3 = z \quad (76)$$

$$\partial_\mu = \frac{\partial}{\partial x^\mu} \quad (77)$$

そして

$$A^0 = -A_0, \quad A^1 = A_1, \quad A^2 = A_2, \quad A^3 = A_3, \quad etc. \quad (78)$$

$$\begin{aligned} F_{i0} &= \partial_i A_0 - \partial_0 A_i \\ &= \partial_i \left( -\frac{\phi}{c} \right) - \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} A_i \\ &= \frac{1}{c} E_i \end{aligned} \quad (79)$$

$$\begin{aligned} F_{ij} &= \partial_i A_j - \partial_j A_i \\ &= B^k \epsilon_{ijk} \end{aligned} \quad (80)$$

ただし,  $\epsilon_{ijk}$  はレヴィ-チビタテンソル, (完全反対称テンソルで,  $\epsilon_{123} = 1$ ), また, 一つの項におなじ添え字が出てくるときは和をとるものとする (アインシュタインの規約)。

$$F_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{E_x}{c} & -\frac{E_y}{c} & -\frac{E_z}{c} \\ \frac{E_x}{c} & 0 & B_z & -B_y \\ \frac{E_y}{c} & -B_z & 0 & B_x \\ \frac{E_z}{c} & B_y & -B_x & 0 \end{pmatrix} \quad (81)$$

$$F^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{E_x}{c} & \frac{E_y}{c} & \frac{E_z}{c} \\ -\frac{E_x}{c} & 0 & B_z & -B_y \\ -\frac{E_y}{c} & -B_z & 0 & B_x \\ -\frac{E_z}{c} & B_y & -B_x & 0 \end{pmatrix} \quad (82)$$

### 3.2 Maxwell equation

current:

$$j^\mu = (\rho c, \mathbf{j}) \quad (83)$$

Maxwell equation:

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = -\mu_0 j^\nu \quad (84)$$

exercise. これを確かめよ。

恒等式 :

$$\partial_\mu F_{\nu\lambda} + \partial_\nu F_{\lambda\mu} + \partial_\lambda F_{\mu\nu} = 0 \quad (85)$$

exercise. のこりの方程式が出ることを確かめよ。

### 3.3 conservation of current

Maxwell equation より

$$\partial_\nu \partial_\mu F^{\mu\nu} = -\mu_0 \partial_\nu j^\nu \quad (86)$$

$F$  の反対称性より

$$\partial_\nu \partial_\mu F^{\mu\nu} = 0 \quad (87)$$

ゆえに

$$\partial_\nu j^\nu = 0 \quad (88)$$

これは

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{j} = 0 \quad (89)$$

である。

### 3.4 gauge transformation

$$A_\mu \rightarrow A_\mu + \partial_\mu \lambda \quad (90)$$

### 3.5 gauge condition

ローレンスゲージ

$$\nabla \cdot \mathbf{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \phi}{\partial t} = 0 \quad (91)$$

は、次のように書ける。

$$\partial_\mu A^\mu = 0 \quad (92)$$

### 3.6 dual tensor

$$\tilde{F}^{\mu\nu} = \frac{1}{2} \epsilon^{\mu\nu\lambda\sigma} F_{\lambda\sigma} \quad (93)$$

ただし、 $\epsilon^{\mu\nu\lambda\sigma}$  は完全反対称で  $\epsilon^{0123} = 1$

$$\tilde{F}^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & B_x & B_y & B_z \\ -B_x & 0 & -\frac{E_z}{c} & \frac{E_y}{c} \\ -B_y & \frac{E_z}{c} & 0 & -\frac{E_x}{c} \\ -B_z & -\frac{E_y}{c} & \frac{E_x}{c} & 0 \end{pmatrix} \quad (94)$$

$$\partial_\mu \tilde{F}^{\mu\nu} = 0 \quad (95)$$

は

$$\partial_\mu F_{\nu\lambda} + \partial_\nu F_{\lambda\mu} + \partial_\lambda F_{\mu\nu} = 0 \quad (96)$$

と等価である。

### 3.7 invariant

$$\frac{1}{2} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} = -\frac{1}{c^2} \mathbf{E}^2 + \mathbf{B}^2 \quad (97)$$

$$\frac{1}{2}F_{\mu\nu}\tilde{F}^{\mu\nu} = -\frac{2}{c}\mathbf{E}\cdot\mathbf{B} \quad (98)$$

### 3.8 action

$$S = \int d^4x \left[ -\frac{1}{4\mu_0}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + A_\mu j^\mu \right] \quad (99)$$

### 3.9 differential form

$$A = A_\mu dx^\mu \quad (100)$$

$$F = \frac{1}{2}F_{\mu\nu}dx^\mu \wedge dx^\nu \quad (101)$$

とすると

$$F = dA \quad (102)$$

ゲージ変換

$$A \rightarrow A + d\lambda \quad (103)$$

$d^2 = 0$  より,  $F$  は不変。