

曲率を計算する

白石 清 (山口大学理学部)

1998年12月07日

概要

多脚場を使って、曲率を計算する。簡略化のため、説明の論理は穴だらけかも知れないので、頭から信じ込まないよーに。

1 多脚場を導入

計量を次のように書く。

$$g_{\mu\nu} = e_\mu^a e_{a\nu} = \eta_{ab} e_\mu^a e_\nu^b \quad (1)$$

ここで $\eta_{ab} = \text{diag.}(-1, 1, 1, 1)$ などとする。(何次元でもよい)

e_μ^a を多脚場 (vielbein) と呼ぶ。四次元の場合は、四脚場 (vierbein)。多脚場に対する共変微分を、以下のようにする。

$$\nabla_\nu e_\mu^a = \partial_\nu e_\mu^a + \omega_{\nu b}^a e_\mu^b - \Gamma_{\nu\mu}^\lambda e_\lambda^a \quad (2)$$

また、

$$\nabla_\nu \eta_{ab} = 0 \quad (3)$$

とする。

このとき

$$\begin{aligned} \nabla_\lambda g_{\mu\nu} &= \nabla_\lambda (e_\mu^a e_{a\nu}) \\ &= \partial_\lambda (e_\mu^a e_{a\nu}) - \Gamma_{\lambda\mu}^\rho e_\rho^a e_{a\nu} - \Gamma_{\lambda\nu}^\rho e_\mu^a e_{a\rho} \\ &= (\nabla_\lambda e_\mu^a) e_{a\nu} + e_\mu^a \nabla_\lambda e_{a\nu} - (\omega_\lambda^{ab} + \omega_\lambda^{ba}) e_{a\mu} e_{b\nu} \end{aligned} \quad (4)$$

となるから、

$$\nabla_\lambda g_{\mu\nu} \iff \nabla_\lambda e_\mu^a = 0 \quad \text{and} \quad \omega_\lambda^{ab} = -\omega_\lambda^{ba} \quad (5)$$

がわかる。

Γ を消去して、 e と ω の関係を求める。そのために、 $\nabla_\nu e_\mu^a = 0$ より、

$$\nabla_\nu e_\mu^a - \nabla_\mu e_\nu^a = 0 \quad (6)$$

を考える。上の式から

$$\partial_\nu e_\mu^a + \omega_{\nu b}^a e_\mu^b - (\nu \leftrightarrow \mu) = 0 \quad (7)$$

このような反対称の式は、微分形式を使うと、簡単に表される。

$$e^a \equiv e_\mu^a dx^\mu, \quad \omega^{ab} \equiv \omega_\mu^{ab} dx^\mu \quad (8)$$

を定義し、

$$dx^\mu \wedge dx^\nu = -dx^\nu \wedge dx^\mu \quad (9)$$

および

$$ddx^\mu = 0, \quad de^a = \partial_\nu e_\mu^a dx^\nu \wedge dx^\mu \quad (10)$$

などから、

$$\nabla_\nu e_\mu^a - \nabla_\mu e_\nu^a = 0 \iff de^a + \omega^a_b \wedge e^b = 0 \quad (11)$$

を得る。ただし $\omega^{ab} = -\omega^{ba}$ 。

2 曲率

$$\begin{aligned}
& [\nabla_\rho, \nabla_\sigma] e_\mu^a \\
&= (\partial_\rho \omega_\sigma^a{}_b + \omega_\rho^a{}_c \omega_\sigma^c{}_b) e_\mu^b - (\partial_\rho \Gamma_{\sigma\mu}^\lambda - \Gamma_{\rho\mu}^\tau \Gamma_{\sigma\tau}^\lambda) e_\lambda^a \\
&\quad - (\rho \leftrightarrow \sigma) \\
&= (\partial_\rho \omega_\sigma^a{}_b - \partial_\sigma \omega_\rho^a{}_b + \omega_\rho^a{}_c \omega_\sigma^c{}_b - \omega_\sigma^a{}_c \omega_\rho^c{}_b) e_\mu^b \\
&\quad - (\partial_\rho \Gamma_{\sigma\mu}^\lambda - \partial_\sigma \Gamma_{\rho\mu}^\lambda + \Gamma_{\sigma\mu}^\tau \Gamma_{\rho\tau}^\lambda - \Gamma_{\rho\mu}^\tau \Gamma_{\sigma\tau}^\lambda) e_\lambda^a \tag{12}
\end{aligned}$$

なので, $[\nabla_\rho, \nabla_\sigma] e_\mu^a = 0$ より

$$\begin{aligned}
& \partial_\rho \omega_\sigma^a{}_b - \partial_\sigma \omega_\rho^a{}_b + \omega_\rho^a{}_c \omega_\sigma^c{}_b - \omega_\sigma^a{}_c \omega_\rho^c{}_b \\
&= e_\mu^a e_{b\nu} R^{\mu\nu}{}_{\rho\sigma} = R^a{}_{b\rho\sigma} \tag{13}
\end{aligned}$$

ただし

$$R^{\lambda}{}_{\mu\rho\sigma} = \partial_\rho \Gamma_{\sigma\mu}^\lambda - \partial_\sigma \Gamma_{\rho\mu}^\lambda + \Gamma_{\sigma\mu}^\tau \Gamma_{\rho\tau}^\lambda - \Gamma_{\rho\mu}^\tau \Gamma_{\sigma\tau}^\lambda, \tag{14}$$

これはリーマン曲率テンソル。

結局, e から ω を求め, ω から曲率を計算できる。微分形式では,

$$\begin{aligned}
\Theta^a{}_b &= d\omega^a{}_b + \omega^a{}_c \wedge \omega^c{}_b \\
&= \frac{1}{2} R^a{}_{b\rho\sigma} dx^\rho \wedge dx^\sigma \tag{15}
\end{aligned}$$

が curvature 2-form と呼ばれるものである。

まとめ

$$\begin{aligned}
de^a + \omega^a{}_b \wedge e^b &= 0 \\
\Theta^a{}_b &= d\omega^a{}_b + \omega^a{}_c \wedge \omega^c{}_b
\end{aligned}$$

3 曲率の計算例

3.1 Robertson-Walker metric

宇宙論のモデルとして, 一様等方な空間がよく用いられる。

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t) d\Omega_N^2 \tag{16}$$

この場合,

$$e^0 = dt, \quad e^A = a(t) \tilde{e}^A \tag{17}$$

ただし

$$d\tilde{e}^A + \tilde{\omega}^A_B \wedge \tilde{e}^B = 0, \quad (18)$$

$A = 1, \dots, N$ とする。さらに, N 次元空間が最大の対称性をもっている
とすると, curvature 2-form は次のように書ける。

$$\tilde{\Theta}^A_B = d\tilde{\omega}^A_B + \tilde{\omega}^A_C \wedge \tilde{\omega}^C_B = k\tilde{e}^A \wedge \tilde{e}^B, \quad (19)$$

ここで k は定数。 $k = 1, 0, -1$ のいずれかに規格化できる。
 e の外微分から

$$de^0 = 0, \quad (20)$$

$$\begin{aligned} de^A &= \dot{a}dt \wedge \tilde{e}^A + a d\tilde{e}^A \\ &= \frac{\dot{a}}{a}e^0 \wedge e^A - \tilde{\omega}^A_B \wedge e^B, \end{aligned} \quad (21)$$

なので,

$$\omega^A_0 = \frac{\dot{a}}{a}e^A, \quad \omega^A_B = \tilde{\omega}^A_B \quad (22)$$

曲率 2-form はこのとき

$$\begin{aligned} \Theta^0_A &= d\omega^0_A + \omega^0_B \wedge \omega^B_A \\ &= d\left(\frac{\dot{a}}{a}e^A\right) + \frac{\dot{a}}{a}e^B \wedge \tilde{\omega}^B_A \\ &= \left[\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)' + \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2\right]e^0 \wedge e^A \\ &= \frac{\ddot{a}}{a}e^0 \wedge e^A, \end{aligned} \quad (23)$$

$$\begin{aligned} \Theta^A_B &= d\omega^A_B + \omega^A_C \wedge \omega^C_B + \omega^A_0 \wedge \omega^0_B \\ &= \tilde{\Theta}^A_B + \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 e^A \wedge e^B \\ &= \frac{\dot{a}^2 + k}{a^2}e^A \wedge e^B. \end{aligned} \quad (24)$$