物理数学演習

– 特殊関数 –

白石　清（山口大学理学部）

平成 12 年 7 月 22 日

概 要

この問題集は，お茶の水女子大学で物理数学演習をやらせていただいたときにつくったものをもとにしています。主に物理によく出てくる関数，特殊関数，直交多項式，などについての公式の確認です。正確には関数ではないけど，デルタ関数も考えました。元々一番参考にさせてもらったのは，小野寺嘉孝著,（基礎演習シリーズ）物理のための応用数学，裳華房です。

小寺平治著，大学入試数学のルーツ，現代数学社　（ガンマ関数・ベータ関数，ルジャンドル多項式）もおもしろい。

実は，見つからないプリント（たとえば $N_\nu(x)$？）がありまして，不完全です。お茶の水女子大学出身の方でもっている方がおられましたらご一報下さい。（配布していなかったかも知れない。）

1　Γ 関数

1.1　定義

$$\Gamma(x) \equiv \int_0^\infty e^{-t} t^{x-1} dt \tag{1}$$

1. $\Gamma(1)$ を求めよ。
2. $\Gamma(\frac{1}{2})$ を求めよ。
3. 漸化式
$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x) \tag{2}$$
を証明せよ。

4.

$$\Gamma(n+1) = n! \tag{3}$$

（n は正の整数）を示せ。

5.

$$\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right) = \frac{(2n)!}{n!2^{2n}}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \tag{4}$$

を導け。

1.2 Weierstrass の標準形

$$\frac{1}{\Gamma(x)} = xe^{\gamma x}\prod_{n=1}^{\infty}\left[\left(1+\frac{x}{n}\right)e^{-x/n}\right] \tag{5}$$

ただし，$\gamma = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}-\ln n\right) = 0.577\ldots$

1. (5) から Euler の表示式

$$\Gamma(x) = \frac{1}{x}\prod_{n=1}^{\infty}\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^{x}\left(1+\frac{x}{n}\right)^{-1}\right] \tag{6}$$

を導け。

2. Euler の表示式から

$$\Gamma(x) = \lim_{n\to\infty}\frac{n^x n!}{x(x+1)\cdots(x+n)} \tag{7}$$

を導け。

3. (7) を用い，(2) の性質と $\Gamma(1)$ の値を確かめよ。

1.3 漸近形

$$\Gamma(x) = \frac{1}{x}\Gamma(x+1) = \frac{1}{x}\int_0^{\infty}e^{-t}t^x dt \tag{8}$$

$t = xz$ とおくと

$$\Gamma(x) = x^x\int_0^{\infty}e^{x(\ln z - z)}dz \tag{9}$$

（確かめよ!）

$f'(z_0)=0$ となる z_0 のまわりで $f(z)\approx f(z_0)+\frac{1}{2}f''(z_0)$ と近似することにより，上の積分を $x>>1$ のときに評価して $\Gamma(x)$ の漸近形を求めよ。

こたえ：

$$\Gamma(x)\approx\sqrt{2\pi}x^{x-1/2}e^{-x} \tag{10}$$

Stirling の公式

$$n!\approx\sqrt{2\pi n}n^ne^{-n} \tag{11}$$

と比較せよ。

1.4 ベータ関数

$$B(x,y)=\int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}dt \tag{12}$$

1.

$$\frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}=2\int_0^{\pi/2}\sin^{2p-1}\varphi\cos^{2q-1}\varphi d\varphi \tag{13}$$

を示せ。

ヒント：$\Gamma(p)\Gamma(q)$ をまず計算する。$\Gamma(p)=2\int_0^\infty e^{-x^2}x^{2p-1}dx$ を使う。

2.

$$\frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}=B(x,y) \tag{14}$$

を示せ。

3.

$$B(x,y)=\int_0^\infty\frac{s^{x-1}}{(s+1)^{x+y}}ds \tag{15}$$

を示せ。

Polchinski の “String theory” の教科書（第 1 巻）参照。

1.5 「反転」

$$\Gamma(x)\Gamma(1-x)=\frac{\pi}{\sin\pi x} \tag{16}$$

を示せ。

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}+z\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}-z\right)=\frac{\pi}{\cos\pi x} \tag{17}$$

も示せる。

1.6　球の体積

$x+y+z<1,\ x>0,\ y>0,\ z>0$ の 4 平面で囲まれる領域 V で

$$\int\int\int_V x^{a-1}y^{b-1}z^{c-1}dxdydz \tag{18}$$

を求めよ。

答：

$$\frac{\Gamma(a)\Gamma(b)\Gamma(c)}{\Gamma(a+b+c+1)} \tag{19}$$

この結果を用いて，3 次元空間内の単位球の体積を求めよ。n 次元のときはどうか。（単位球の体積は，Gauss 積分を用いて求めることもできるので，考えてみて下さい。）

1.7　「倍角」公式

1. 次式の成立を示せ。n は正整数。

$$\frac{\Gamma(2z+2n)}{\Gamma(2z)}=\frac{2^{2n}\Gamma(z+n)\Gamma(z+1/2+n)}{\Gamma(z)\Gamma(z+1/2)} \tag{20}$$

2.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\Gamma(z+n)}{(n-1)!n^z}=1 \tag{21}$$

を導け。

3. 上の (20)(21) を用いて，次の式を証明せよ。

$$\sqrt{\pi}\Gamma(2z)=2^{2z-1}\Gamma\left(z\right)\Gamma\left(z+\frac{1}{2}\right) \tag{22}$$

1.8　ファインマン積分「もどき」

1.

$$\int_0^1\frac{x^{\mu-1}(1-x)^{\nu-1}}{[ax+b(1-x)]^{\mu+\nu}}dx=\frac{B(\mu,\nu)}{a^\mu b^\nu} \tag{23}$$

を示せ。

2. (23) を用いて

$$\int_0^\infty\frac{p^2dp}{(p^2+m^2)(p^2+M^2)} \tag{24}$$

を計算せよ。

1.9　小テスト　01/17/1991

N 次元超球の体積を求めよう。
N 次元超球：　$x_1{}^2 + x_2{}^2 + \cdots + x_N{}^2 \leq r^2$

1. 1 次元超球，2 次元超球，3 次元超球の体積はどう表せるか。
2. $N-1$ 次元超球の体積と N 次元超球の体積との間の関係を調べる。下の図を参考にして，N 次元超球の体積を $V_N r^N$ としたとき，V_N/V_{N-1} を求めよ。なお，次の公式を使っても良い。

$$B(p,q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)} = 2\int_0^{\pi/2} \sin^{2p-1}\theta \cos^{2q-1}\theta d\theta \tag{25}$$

図 1（省略）

$$V_2 r^2 = \int_{-r}^{r} 2(r\sin\theta)dx, \qquad (x = r\cos\theta) \tag{26}$$

図 2（省略）

$$V_3 r^3 = \int_{-r}^{r} \pi(r\sin\theta)^2 dx, \qquad (x = r\cos\theta) \tag{27}$$

3. 2 で求めた関係式を使って，V_N を求めよ。結果はできる限り Γ 関数を使って表せ。
4. N 次元超球に外接する N 次元超立方体の体積を求めよ。
また，$X_N \equiv$ (N 次元超球の体積)/(外接する N 次元超立方体の体積) を求めよ。
5. $\lim_{N\to\infty} X_N$ を求めよ。
6. N 次元超球に内接する N 次元超立方体の体積を求めよ。
また，$Y_N \equiv$ (内接する N 次元超立方体の体積)/(N 次元超球の体積) を求めよ。
（ヒント：立方体の対角線の長さ $= 2r$）
7. $\lim_{N\to\infty} Y_N$ を求めよ。

2　δ 関数

2.1　定義

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\delta(x)dx = f(0) \tag{28}$$

and $x \neq 0$ ならば $\delta(x) = 0$

これはどう見ても，まっとうな関数ではない。（超函数）

しかし，“ぶつりやさん”はそんなことぐらいでは驚かない。

次のことを示せ。

1. $\delta(x)$ は偶関数である。
2. $x\delta'(x) = -\delta(x)$
3. $\delta(ax) = a^{-1}\delta(x) \quad (a > 0)$
4. $\delta(x^2 - a^2) = (2a)^{-1}[\delta(x-a) + \delta(x+a)]$
5. $\delta(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{ixt}dt$

2.2 関数の極限としての δ 関数

δ 関数はいろいろな関数の極限として与えられる。

次の関数の極限が δ 関数となるように $a, b, \ldots$ を決定せよ。

1.
$$\lim_{\epsilon \to +0} f(x), \tag{29}$$
$$f(x) = \begin{cases} 0 & (x < -\epsilon,\ \epsilon < x) \\ a & (-\epsilon \leq x \leq \epsilon) \end{cases} \tag{30}$$

2.
$$\lim_{\epsilon \to 0} \frac{a\epsilon}{x^2 + \epsilon^2} \tag{31}$$

3.
$$\lim_{\epsilon \to 0} \frac{a}{\epsilon^b \cosh^2(x/\epsilon)} \tag{32}$$

4.
$$\lim_{\epsilon \to 0} \frac{1}{c\epsilon^b} \exp\left(-\frac{x^2}{a\epsilon}\right) \tag{33}$$

3 拡散方程式と ϑ 関数「入門」

3.1 拡散方程式（熱伝導方程式）

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{34}$$

を満たす $u(x,t)$ で

$$\lim_{t\to+0} u(x,t) = f(x) \quad \text{（初期条件）} \tag{35}$$

（$f(x)$：周期 1，区分的滑らかな関数）
を満たすものを見いだす。

3.1.1　フーリエ級数を使う

$$u(x,t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-C_n t} g_n(x), \tag{36}$$

$$g_n(x) = A_n \cos(2\pi n x) + B_n \sin(2\pi n x) \tag{37}$$

と書ける。

1. C_n を求めよ。
2. $$g_n(x) = \int_0^1 f(\alpha)\cos[2\pi n(x-\alpha)]d\alpha \tag{38}$$
   を示せ。

3.1.2　“グリーン関数”を使う

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right) G(x,t) = 0, \tag{39}$$

$$\lim_{t\to+0} G(x,t) = \delta(x) \tag{40}$$

となる $G(x,t)$ を用いて

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_0^1 f(n+\alpha) G(x-\alpha,t) d\alpha \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_0^1 f(\alpha) G(x+n-\alpha,t) d\alpha \end{aligned} \tag{41}$$

と表せる。

1. $G(x,t)$ を求めよ。

3.1.3　ヤコビの反転公式

以上のことから，

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-4\pi^2 n^2 t}\cos(2\pi n x) = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\exp\left[-\frac{(x-n)^2}{4t}\right] \tag{42}$$

という関係式が求まる。

$$\vartheta_3(v|\tau) \equiv \sum_{n=-\infty}^{\infty}\exp(i\pi\tau n^2 + 2\pi i v n) \tag{43}$$

という関数についてはどんな関係式が書けるか？

3.1.4　付録：解の一意性

拡散方程式の解がいくつか求まったとすると，それらの差 u も同じ方程式

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (t > 0) \tag{44}$$

をみたす。

これに u をかけたもの

$$u\frac{\partial u}{\partial t} - u\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \tag{45}$$

を積分すると，

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_0^1 u^2 dx \quad &- \quad \left[u\frac{\partial u}{\partial x}\right]_{x=0}^{x=1} + \int_0^1\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 dx \\ &= \quad \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_0^1 u^2 dx + \int_0^1\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 dx = 0 \\ &\Rightarrow \quad \frac{d}{dt}\int_0^1 u^2 dx \leq 0\end{aligned} \tag{46}$$

したがって，$t=0$ で $u\equiv 0$ ならば

$$t=0 \qquad \int_0^1 u^2 dx = 0 \quad \rightarrow \quad t>0 \qquad u\equiv 0 \tag{47}$$

ゆえに，初期条件を決めたとき，拡散方程式の解は一意。

4　ζ 関数

4.1　定義

Riemann の ζ 関数

$$\zeta(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^z} \tag{48}$$

1. 次の級数の和を ζ 関数で表せ。

(a)

$$1 - \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} - \frac{1}{4^s} + \cdots \tag{49}$$

(b)

$$1 + \frac{1}{3^s} + \frac{1}{5^s} + \frac{1}{7^s} + \cdots \tag{50}$$

2. x^2 のフーリエ展開を使って，$\zeta(2)$ の値を求めよ。
$\zeta(4)$ の値を求めるにはどうしたらよいだろう。

4.2　積分表示

1.

$$\zeta(z) = \frac{1}{\Gamma(z)} \int_0^{\infty} \frac{t^{z-1}}{e^t - 1} dt \tag{51}$$

を示せ。

2. 上の式 (51) とはあまり関係ありませんが，以前求めた公式 (42) を用いて，次の式を証明せよ。

$$\zeta(z)\Gamma\left(\frac{z}{2}\right) = \pi^{z-1/2}\zeta(1-z)\Gamma\left(\frac{1-z}{2}\right) \tag{52}$$

4.3　素数にわたる無限乗積表示

1.

$$\zeta(z) = \prod_{p}^{\infty}(1 - p^{-z})^{-1} \tag{53}$$

を示せ。ただし，上の式で p はすべての素数にわたるものとする。

2. $\zeta(1)$ が発散することから，素数が無限個あることを示せ。

4.4　負の整数 z に対する $\zeta(z)$ の値

Riemann の ζ 関数で負の整数値に対する値は，たとえば『岩波数学公式集』に出ている。前の式 (52) により，正の偶数のときの関数の値から，負の奇数のときの ζ 関数の値を決めることができる。

ここでは異なった方法で求めてみる。

まず次の関係式はよく御存じでしょう。

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - x^5 + - \cdots \tag{54}$$

ここで（形式的に）x を 1 とおくと，

$$1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + - \cdots = \frac{1}{2} \tag{55}$$

となってしまいます。

これを前にやった (49) で $s = 0$ とおいたものと同一視すると，$\zeta(0) = -1/2$ ということになりますが（確かめよ），これは（公式集にもあるように）ちゃんとした複素関数論で定義された値と一致します。

1. 式 (54) を微分したものに $x = 1$ を代入することにより，$\zeta(-1)$ の値を求めよ。
2. 次に $\zeta(-3)$ の値を求めよ。
3. 前に求めた $\zeta(2)$，$\zeta(4)$ の値を用いて公式 (52) の成立を確かめよ。
4. $\zeta(-2n) = 0$（n は正の整数）を示せ。

5　ベッセル関数

$$\begin{aligned} J_n(x) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{ix\sin\theta - in\theta} d\theta \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \cos(x\sin\theta - n\theta) d\theta \end{aligned} \tag{56}$$

5.1　微分方程式

$J_n(x)$ は次の微分方程式を満たすことを示せ。

$$\frac{d^2 J_n}{dx^2} + \frac{1}{x}\frac{dJ_n}{dx} + \left(1 - \frac{n^2}{x^2}\right) J_n = 0 \tag{57}$$

5.2　偶奇性

$$J_n(-x) = J_{-n}(x) = (-1)^n J_n(x) \tag{58}$$

を示せ。

5.3　フーリエ級数，あるいは母関数

$$e^{ix\sin\theta} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(x) e^{in\theta} \tag{59}$$

を示せ。ここで $e^{i\theta}$ を t とおくと，

$$\exp\left[\frac{x}{2}\left(t - \frac{1}{t}\right)\right] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(x) t^n \tag{60}$$

を得る。

5.4　級数

$$J_0(x) + 2\sum_{n=1}^{\infty} J_{2n}(x) = 1 \tag{61}$$

と

$$J_1(x) + 3J_3(x) + 5J_5(x) + \cdots = \frac{x}{2} \tag{62}$$

を示せ。

5.5　定積分

$$\int_0^{\infty} e^{-ax} J_0(bx) dx = \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}} \tag{63}$$

を示せ。

5.6 加法定理

(60) などから

$$J_n(x+y) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} J_m(x) J_{n-m}(y) \tag{64}$$

を導け。

5.7 べき級数展開

微分方程式

$$\frac{d^2u}{dx^2} + \frac{1}{x}\frac{du}{dx} + \left(1 - \frac{\nu^2}{x^2}\right) u = 0 \tag{65}$$

の解を求めたい。ν は一般に整数でなくても良いとする。

1. $$u(x) = \sum_{k=0}^{\infty} C_k x^{k+\rho} \tag{66}$$
   の形を仮定して，C_k を求めよ。(C_0 は不定。）一般には二つの独立な解が求まる。
2. ν が整数 n のとき，前に導入した $J_n(x)$ と一致させるには，C_0 をどう取れば良いか。それを ν が整数でないときに拡張しようとすればどうなるか。
3. この級数の形を用いて，$J_n(-x) = J_{-n}(x) = (-1)^n J_n(x)$ を示せ。

5.8 漸化式

次の漸化式の成り立つことを示せ。（母関数を用いても良い。）

1. $$J_{n+1}(x) = \frac{2n}{x} J_n(x) - J_{n-1}(x) \tag{67}$$
2. $$J_n{}'(x) = \frac{1}{2}[J_{n-1}(x) - J_{n+1}(x)] \tag{68}$$
3. $$x J_n{}'(x) = x J_{n-1}(x) - n J_n(x) = n J_n(x) - x J_{n+1}(x) \tag{69}$$

4.
$$\frac{d}{dx}[x^n J_n(x)] = x^n J_{n-1}(x) \tag{70}$$

5.
$$\frac{d}{dx}[x^{-n} J_n(x)] = -x^{-n} J_{n+1}(x) \tag{71}$$

5.9　2次元空間における散乱

2次元空間内で2個の粒子が衝突し，互いに散乱するとき，2粒子の相対座標に関して次のようなシュレディンガー方程式が書ける。

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2M}\Delta + V(r)\right]\psi(\mathbf{r}) = E\psi(\mathbf{r}), \quad E > 0 \tag{72}$$

E：エネルギー，M：換算質量，Δ：ラプラシアン

ここで片方の粒子は標的として十分重く，散乱の過程で原点Oに静止したままとする。

波動関数をフーリエ展開する。つまり（図を参照）（図は省略）

$$\psi(\mathbf{r}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n R_n(r) e^{in\theta} \tag{73}$$

1. このとき$R_n(r)$に対する微分方程式はどうなるか。
ψの境界条件は
$$\psi(\mathbf{r}) \stackrel{r\to\infty}{\to} \psi_{in}(\mathbf{r}) + \psi_{sc}(\mathbf{r}) \tag{74}$$
である。ここで入射波ψ_{in}としては平面波$e^{\frac{i}{\hbar}px}$をとる。これは単位体積に粒子が1個存在するような規格化になっている。また，散乱波ψ_{sc}として次のように取ることができる。
$$\psi_{sc}(\mathbf{r}) = \frac{f(\theta)}{\sqrt{r}} e^{\frac{i}{\hbar}pr} \quad \text{（外向きの波）} \tag{75}$$

2. 平面波$e^{\frac{i}{\hbar}px}$をフーリエ展開せよ。
$r \to \infty$で$V(r)$を無視できるとすれば1.から，$R_n(r)$はベッセル関数で表されることが分かる。つまり
$$R_n = A_n J_n(kr) + B_n N_n(kr), \qquad k = \frac{p}{\hbar} \tag{76}$$

3. $J_n(z)$ の $z \to \infty$ のとき漸近形を次のように求めよう。まず

$$J_n(z) = \Re\left[\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} e^{iz\sin\theta - in\theta} d\theta\right] \tag{77}$$

において $iz = y$ とおき，$y \to \infty$ と思う。そうすれば，Γ 関数のときにやった方法で漸近形を求めることができる。つまり

$$e^{-f(z)} \approx e^{-f(z_0)} e^{-\frac{1}{2}f''(z_0)(z-z_0)^2} \quad (f'(z_0) = 0) \tag{78}$$

4.

$$N_n(z) = \frac{1}{\pi}\left[\frac{\partial J_\nu(z)}{\partial \nu} - (-1)^n \frac{\partial J_{-\nu}(z)}{\partial \nu}\right]_{\nu=n} \tag{79}$$

の漸近形は？

ポテンシャルがない場合には $r = 0$ でも波動関数は有限でなくてはならないから，R_n は J_n だけで表されるが，ポテンシャルがある場合には，J_n と N_n の線形結合で表せるはずである。したがって，一般に R_n の漸近形は

$$R_n(kr) \overset{r\to\infty}{\to} \sqrt{\frac{2}{\pi kr}} \cos\left(kr - \frac{n\pi}{2} - \frac{\pi}{4} + \delta_n\right) \tag{80}$$

と表せるはずである。ここで δ_n を phase shift と呼ぶ。後で見るように，散乱の情報はこの δ_n に含まれている。

境界条件と比べることによって，a_n を決める。

5. 2. で求めた平面波の展開と一般の波動関数の表式（δ_n を含む）を用いて，散乱波には外向きの波しか含まれないという条件から，a_n（δ_n を含む）を決定せよ。

6. 散乱振幅 $f(\theta)$ を δ_n を用いて表せ。

入射方向に垂直な単位面積に，単位時間当たり 1 個の粒子が入射するとき，θ 方向の微小な角度に射出される粒子数を $\frac{d\sigma}{d\theta}$ とすると，

$$\frac{d\sigma}{d\theta} = |f(\theta)|^2 \tag{81}$$

これを微分断面積という。

微分断面積をすべての散乱角について加えたものを全断面積といい，σ_{tot} で表す。これは 1 個の入射粒子の入射波が入射方向に垂直な単位面積に一様に広がっているとき，1 個の散乱中心が散乱を起こさせる確率を，そこに当たった入射波だけが散乱される部分の面積という形で表したものと解釈できる。

7. 全断面積

$$\sigma_{tot} = \int_0^{2\pi} \frac{d\sigma}{d\theta} d\theta \tag{82}$$

を求めよ。

8. 次のポテンシャルによる，$n = 0$ の散乱波の phase shift を求めよ。

$$V(r) = \begin{cases} +\infty & (r < a) \\ 0 & (r > a) \end{cases} \tag{83}$$

6　第２種変形ベッセル関数

第 2 種変形ベッセル関数を次の積分表示で定義する。

$$K_\nu(z) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\nu t - z\cosh t} dt \tag{84}$$

（ここで $\cosh t = \frac{e^t + e^{-t}}{2}$）

6.1　漸近形

z が十分大きいときの $K_\nu(z)$ の漸近形を求めよ。
必要ならば $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$ を使って良い。

6.2　別の積分表示

$$K_\nu(z) = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} x^{-\nu-1} \exp\left[-\frac{z}{2}\left(x + \frac{1}{x}\right)\right] dx \tag{85}$$

と書き換えられることを示せ。（ただし $\exp[A]$ は e^A を表す。）

6.3　漸化式

次の漸化式の成立を示せ。

1.
$$\frac{dK_\nu(z)}{dz} = -\frac{1}{2}[K_{\nu-1}(z) + K_{\nu+1}(z)] \tag{86}$$

2.
$$K_{\nu-1}(z) - K_{\nu+1}(z) = -\frac{2\nu}{z} K_\nu(z) \tag{87}$$

6.4　微分方程式

$K_\nu(z)$ の満たす 2 階線形微分方程式を求めよ。

6.5　$z \to 0$ でのふるまい

(85) 式で $x = \frac{z}{2}y$ と置き換える。ν が正のとき，おきかえた式を用いて，z の小さいときの $K_\nu(z)$ の振る舞いを示せ。（例：$\cot ax \approx \frac{1}{ax}$ のように。）

6.6　解析的に書ける場合（ν：半奇数）

(85) 式で $x \to \frac{1}{x}$ と置き換えると

$$K_\nu(z) = \frac{1}{2}\int_0^\infty x^{\nu-1}\exp\left[-\frac{z}{2}\left(x+\frac{1}{x}\right)\right]dx \tag{88}$$

を得る。(85)+(88) を用いて，$K_{1/2}(z)$ の具体的な関数形を求めよ。
ヒント：$\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}} = u$ とおく。

7　エルミート多項式

エルミート多項式 $H_n(x)$ を次の母関数によって定義する。

$$e^{2tx-t^2} = \sum_{n=0}^\infty \frac{H_n(x)t^n}{n!} \tag{89}$$

（注：岩波公式集とは定義が異なる。）

7.1　いくつかの具体的かたち

$H_0(x)$，$H_1(x)$，$H_2(x)$ を求めよ。

7.2　漸化式

次の漸化式を導け。

$$H_{n+1}(x) - 2xH_n(x) + 2nH_{n-1}(x) = 0 \tag{90}$$

以上から，$H_n(x)$ は x について n 次の多項式であることが分かる。

7.3 特別な x での値

$H_n(0)$ を求めよ。

7.4 偶奇性

$H_n(-x) = (-1)^n H_n(x)$ を示せ。

7.5 微分

${H_n}'(x) = 2nH_{n-1}(x)$ を示せ。

7.6 2 階微分

${H_n}''(x) - 2x{H_n}'(x) + 2nH_n(x) = 0$ を示せ。

7.7 微分を含む漸化式

次の漸化式を示せ。

$$H_{n+1}(x) = 2xH_n(x) - {H_n}'(x) = 0 \tag{91}$$

7.8 微分を用いた閉じた表式

$$HR_n(x) \equiv (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2} \tag{92}$$

において，$HR_0(x)$，$HR_1(x)$ を求めよ。また (91) の式が $HR_n(x)$ について成り立つことを示せ。

このことから，$H_n(x)$ は $(-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2}$ と同じであることが分かる。(Rodrigue's formula for $H_n(x)$)

7.9 直交関係

ロドリゲスの公式を使って，次の直交関係を示せ。

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} H_m(x) H_n(x) dx = \begin{cases} 0 & for\ m \neq n \\ \sqrt{\pi} 2^n n! & for\ m = n \end{cases} \tag{93}$$

ヒント：$H_n(x)$ は x について n 次の多項式である

8 ルジャンドル多項式

ルジャンドル多項式 $P_n(x)$ を次の母関数によって定義する。

$$\frac{1}{\sqrt{1-2tx+t^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x) t^n \tag{94}$$

8.1 いくつかの具体的かたち

$P_0(x)$，$P_1(x)$ を求めよ。

8.2 漸化式

次の漸化式を導け。

$$(n+1)P_{n+1}(x) - (2n+1)xP_n(x) + nP_{n-1}(x) = 0 \tag{95}$$

以上から，$P_n(x)$ は x について n 次の多項式であることが分かる。

8.3 特別な x での値

$P_n(1)$，$P_n(-1)$ を求めよ。

8.4 偶奇性

$P_n(-x) = (-1)^n P_n(x)$ を示せ。

8.5 微分を含む漸化式

${P_{n+1}}'(x) - 2x{P_n}'(x) + {P_{n-1}}'(x) = P_n(x)$ を示せ。

8.6　2 階微分

$(1-x^2){P_n}''(x) - 2x{P_n}'(x) + n(n+1)P_n(x) = 0$ を示せ。

8.7　微分を含む漸化式

次の漸化式を示せ。

1.
$$
{P_{n+1}}'(x) - x{P_n}'(x) = (n+1)P_n(x) \tag{96}
$$

2.
$$
x{P_n}'(x) - {P_{n-1}}'(x) = nP_n(x) \tag{97}
$$

3.
$$
{P_{n+1}}'(x) - {P_{n-1}}'(x) = (2n+1)P_n(x) \tag{98}
$$

4.
$$
(x^2-1){P_n}''(x) = nxP_n(x) - nP_{n-1}(x) \tag{99}
$$

8.8　ロドリゲスの公式

$$
PR_n(x) \equiv \frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dx^n}\left[(x^2-1)^n\right] \tag{100}
$$

において，$PR_0(x)$，$PR_1(x)$ を求めよ。また (95) の漸化式が $PR_n(x)$ について成り立つことを示せ。

このことから，$P_n(x)$ は $\frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dx^n}\left[(x^2-1)^n\right]$ と同じであることが分かる。(Rodrigue's formula)

8.9　直交関係

ロドリゲスの公式を使って，次の直交関係を示せ。

$$
\int_{-1}^{1} P_m(x)P_n(x)dx = \begin{cases} 0 & for\ m \neq n \\ \frac{2}{2n+1} & for\ m = n \end{cases} \tag{101}
$$

ヒント：$P_n(x)$ は x について n 次の多項式である

9　テスト：ラゲール多項式

ラゲール多項式 $L_n(x)$ を次の母関数によって定義する。

$$\frac{1}{1-t}\exp\left(\frac{xt}{t-1}\right)=\sum_{n=0}^{\infty}L_n(x)t^n \tag{102}$$

$L_n(x)$ について，$H_n(x)$ や $P_n(x)$ と同様な考察をし，様々な公式を導出せよ。

補足： Airy 関数

Dr. Kaplunovsky さんの講義
http://bolvan.ph.utexas.edu/ vadim/Classes/96f.homeworks/saddle.ps
(Fall 1996)
を勉強してください。