

# Weyl変換, Weyl tensor

1999年07月07日改訂

概要

## 1 曲率の定義

Riemann tensor:

$$R^{\mu}{}_{\sigma\beta\alpha} = \partial_{\beta}\Gamma^{\mu}{}_{\sigma\alpha} - \partial_{\alpha}\Gamma^{\mu}{}_{\sigma\beta} + \Gamma^{\mu}{}_{\rho\beta}\Gamma^{\rho}{}_{\sigma\alpha} - \Gamma^{\mu}{}_{\rho\alpha}\Gamma^{\rho}{}_{\sigma\beta} \quad (1)$$

ここで

$$\Gamma^{\sigma}{}_{\mu\nu} = \frac{1}{2}g^{\rho\sigma}(\partial_{\mu}g_{\nu\rho} + \partial_{\nu}g_{\mu\rho} - \partial_{\rho}g_{\nu\mu}) \quad (2)$$

Ricci tensor:

$$R_{\sigma\alpha} \equiv R^{\mu}{}_{\sigma\mu\alpha} \quad (3)$$

scalar curvature:

$$R \equiv g^{\sigma\alpha}R_{\sigma\alpha} \quad (4)$$

## 2 Weyl変換

Weyl変換:

$$g_{\mu\nu} \rightarrow \bar{g}_{\mu\nu} = e^{2\omega}g_{\mu\nu} \quad (5)$$

このとき

$$\begin{aligned}
\bar{R}^\mu{}_{\sigma\beta\alpha} &= R^\mu{}_{\sigma\beta\alpha} + \delta_\alpha^\mu \nabla_\beta \nabla_\sigma \omega - \delta_\beta^\mu \nabla_\alpha \nabla_\sigma \omega \\
&\quad - g_{\sigma\alpha} \nabla_\beta \nabla^\mu \omega + g_{\sigma\beta} \nabla_\alpha \nabla^\mu \omega - \delta_\alpha^\mu \nabla_\beta \omega \nabla_\sigma \omega \\
&\quad + \delta_\beta^\mu \nabla_\alpha \omega \nabla_\sigma \omega + g_{\sigma\alpha} \nabla_\beta \omega \nabla^\mu \omega - g_{\sigma\beta} \nabla_\alpha \omega \nabla^\mu \omega \\
&\quad - \delta_\beta^\mu g_{\sigma\alpha} \nabla_\lambda \omega \nabla^\lambda \omega + \delta_\alpha^\mu g_{\sigma\beta} \nabla_\lambda \omega \nabla^\lambda \omega
\end{aligned} \tag{6}$$

$$\begin{aligned}
\bar{R}_{\mu\nu} &= R_{\mu\nu} - (D-2) \nabla_\mu \nabla_\nu \omega - g_{\mu\nu} \nabla^\lambda \nabla_\lambda \omega \\
&\quad + (D-2) \nabla_\mu \omega \nabla_\nu \omega - (D-2) g_{\mu\nu} \nabla_\lambda \omega \nabla^\lambda \omega
\end{aligned} \tag{7}$$

$$\bar{R} = e^{-2\omega} \left[ R - 2(D-1) \nabla^\lambda \nabla_\lambda \omega - (D-1)(D-2) \nabla_\lambda \omega \nabla^\lambda \omega \right] \tag{8}$$

exercise

scalar field  $\phi$  が Weyl 変換の下で

$$\phi \rightarrow \bar{\phi} = e^{-\frac{D-2}{2}\omega} \phi \tag{9}$$

と変換するものとする。

このとき

$$-\frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_\mu \left( \sqrt{-g} g^{\mu\nu} \partial_\nu \phi \right) + \frac{1}{4} \frac{D-2}{D-1} R \phi = 0 \tag{10}$$

は、Weyl 「不変」 な方程式であることを示せ。

exercise

action

$$S = \int d^D x \sqrt{-g} \left[ -\frac{1}{2} g^{\mu\nu} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi - \frac{1}{8} \frac{D-2}{D-1} R \phi^2 \right] \tag{11}$$

は、Weyl 不変であることを示せ。

また、Weyl 不変な  $\phi$  の自己相互作用項をつくれ。

### 3 Weyl tensor

Weyl tensor:

$$\begin{aligned}
 C_{\mu\sigma\beta\alpha} &= R_{\mu\sigma\beta\alpha} \\
 &+ \frac{1}{D-2} (g_{\mu\alpha}R_{\sigma\beta} + g_{\sigma\beta}R_{\mu\alpha} - g_{\mu\beta}R_{\sigma\alpha} - g_{\sigma\alpha}R_{\mu\beta}) \\
 &+ \frac{1}{(D-1)(D-2)} (g_{\mu\beta}g_{\sigma\alpha} - g_{\mu\alpha}g_{\sigma\beta}) R
 \end{aligned} \tag{12}$$

$$\bar{C}_{\mu\sigma\beta\alpha} = e^{2\omega} C_{\mu\sigma\beta\alpha} \tag{13}$$

対称性:

$$C_{\alpha\beta\gamma\delta} = C_{\gamma\delta\alpha\beta} \tag{14}$$

$$C_{\alpha\beta\gamma\delta} = -C_{\beta\alpha\gamma\delta} = -C_{\alpha\beta\delta\gamma} \tag{15}$$

$$C_{\alpha\beta\gamma\delta} + C_{\alpha\delta\beta\gamma} + C_{\alpha\gamma\delta\beta} = 0 \tag{16}$$

$$C^\alpha{}_{\beta\alpha\delta} \equiv 0 \tag{17}$$

Weyl tensor の独立な成分の個数は、Riemann tensor の独立成分の個数から (17) の制限の個数をひいたものであるので、

$$\frac{D^2(D^2-1)}{12} - \frac{D(D+1)}{2} = \frac{D(D+1)(D+2)(D-3)}{12} \tag{18}$$

である。(D ≥ 3)

exercise

3次元では

$$C_{\alpha\beta\gamma\delta} \equiv 0 \tag{19}$$

となることを示せ。