専門科目　自然の理解

# 宇宙論と重力

白石　清（山口大学理学部）

平成13 年 9 月 7 日

概 要

宇宙の大きなスケールでは，自然界の力のうち，重力がもっとも本質的な役割を演じている。本講義では，宇宙モデル，量子宇宙論，ブラックホールなどをとりあげ，なるべく初等的な力学の知識を用いて，宇宙における重力のさまざまな側面について考えてみたい。一般相対性理論の初歩とその応用についても紹介し，ニュートンの重力理論との比較を試みたい。

# 目 次

# 1 Introduction

重力は最も古くから人類に認識された「力」であろう。[1] ニュートン (1643-1727) 以来の精密科学としての枠組みの中で，重力の概念はアインシュタイン (1879-1955) の一般相対論として結実をみた。

重力は宇宙の様々なスケールで本質的な役割を演じている。これは重力は特徴的な長さのない長距離力であるという特性に由来する。[2]

本講義では力学および基礎数学の知識を前提とする。[3] 講義タイトルは,「宇宙論と重力」だが，ノート[4] をつくっている段階で「重力」のほうに力が入ってしまった。[5] [6] さらに，宇宙論の部分が非常に該博となってしまった。[7] ここでの「宇宙論」は「宇宙物理」と解釈して欲しい。

[1] もっとも,「力」の概念はニュートン以降か？

[2] 最近，パイオニア１０及び１１号が太陽系周辺部で予期しない加速を受けているという報告がある（Phys. Rev. Lett. **81** (1998) 2858 他）。本当だとすると，重力が何かのスケールに依存している可能性がある。

[3] 集中講義なので，まとまったものにしたいが，一方で時間の制約があるため。質問が有ればその都度説明しよう。

[4] この文を書いている時点では,「ノート」とは言い難く,「メモ」である！

[5] それでもやり残したことが多々ある。スウィングバイ [9]，ラグランジュ点のことなど。

[6] 相対論的分野でやり残したことは，重力とスピン，重力子のスピン，場の理論的に見た重力理論の唯一性，など。

[7] 宇宙論的分野でやり残したことは，いっぱい有りすぎる。

# 2　ニュートン重力

## 2.1　地上と天上

質量 $m$ の物体に外力 $\mathbf{F}$ が働いているとき，その運動方程式は

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a} \tag{1}$$

と書ける。ここで $\mathbf{a}$ は物体の加速度。

地表近くでは，鉛直上方に $z$ 軸をとると重力は

$$F_z = -mg \tag{2}$$

で表される。$g$ は重力加速度でほぼ $9.8\mathrm{m/s}$ という値を持つ。ニュートンは，天体の運動の解析から，質量 $M$ の物体によって質量 $m$ の物体に働く力は

$$F_r = -\frac{GMm}{r^2} \tag{3}$$

であることを導いた。$F_r$ は力 $\mathbf{F}$ の動径（方向）成分。ただしここで $G$ は重力定数。[8] これはいわゆる中心力の典型例である。

地球の質量 $M_\oplus$ が地球中心に集まったものとして計算すると[9] 地上の重力加速度は[10]

$$g = \frac{GM_\oplus}{R_\oplus^2} \tag{4}$$

ただしここで地球は半径 $R_\oplus$ の球と近似した。

今，月はだいたい地球のまわりの，半径 $r$ の円軌道上を一定の速さ $v$ で運動しているとすると[11]

$$\frac{v^2}{r} = r\omega^2 = \frac{GM_\oplus}{r^2} \tag{5}$$

$$r\left(\frac{2\pi}{T_{moon}}\right)^2 = g\frac{R_\oplus^2}{r^2} \tag{6}$$

個々の値を入れてみよう。

ところで，ニュートンのリンゴの子孫は世界各地にある。

---

[8] $G$ は本当に「定数」か？というのは興味深い話題であるが，今回は割愛。

[9] この正当性は Appendix

[10] 地上の重力は本当は万有引力と「遠心力」との和。以降も，このような大雑把な話が続く。

[11] $\omega$ は一般に角速度，$T$ は周期と呼ばれる。

ニュートンは，リンゴも月も地球の重力にひかれていることに気がついた。

月は落ちている！ことは次のようにしてわかる。短い時間間隔 $\Delta t$ の間に，月は地球に

$$\sqrt{r^2+(v\Delta t)^2}-r \approx r\left(1+\frac{(v\Delta t)^2}{2r^2}-1\right) \tag{7}$$

$$= \frac{1}{2}\frac{v^2}{r}\Delta t^2 \tag{8}$$

だけ近づいている，すなわち「落ちている」。これは「自由落下」と同様である。

ニュートンは，山の頂上から水平に物体を打ち出す絵を描いている。初速が十分おおきければ，物体は地面に落ちずに，元に戻ってくる。「人工衛星」を予言した？といってもよい。

後に，英国のキャベンディシュ(1731-1810) は実験室で重力の逆自乗則を検証した。

## 2.2 重力ポテンシャル

$\Phi$：重力ポテンシャル

$$\mathbf{F} = -m\nabla\Phi \tag{9}$$

重力ポテンシャルは，単位質量当たりの重力による位置エネルギーである。

地表では

$$\Phi = gz \tag{10}$$

ex. 東京-山口間にトンネルを掘って，その中を重力による運動で通過する。最短時間でいけるようなトンネルの形を求めよ。摩擦は無視する。

一般に質量密度 $\rho(\mathbf{r})$ が与えられているとき，重力ポテンシャルは次で求められる。

$$\Phi(\mathbf{r}) = -G\int_V \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}d^3\mathbf{r}' \tag{11}$$

重力ポテンシャルの満たすべき方程式は

$$\nabla^2 \Phi = 4\pi G\rho \tag{12}$$

である。$\nabla^2$ はラプラシアンと呼ばれる。また，この形の方程式をポアソン方程式と呼ぶ。

中心力の場合（球対称）

$$F_r = -m\frac{\partial \Phi(r)}{\partial r} \tag{13}$$

$$\nabla^2 \Phi(r) = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r} r^2 \frac{\partial \Phi(r)}{\partial r} \tag{14}$$

方程式 (12) の左辺を半径 $R$ の球の内部で体積積分すると

$$\begin{aligned} \int_{\text{球}} \nabla^2 \Phi(r) d^3\mathbf{r} &= 4\pi \int_0^R \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r} r^2 \frac{\partial \Phi(r)}{\partial r} r^2 dr \\ &= 4\pi \left[ r^2 \frac{\partial \Phi(r)}{\partial r} \right]_0^R \end{aligned} \tag{15}$$

原点で $\Phi$ が正則と仮定すれば

$$4\pi\ R^2 \left. \frac{\partial \Phi(r)}{\partial r} \right|_{r=R} \tag{16}$$

一方，方程式 (12) の右辺の積分は

$$4\pi G \int_{\text{球}} \rho(r) d^3\mathbf{r} = 4\pi G M(R) \tag{17}$$

ここで，$M(R)$ は球内にある質量。

したがって，

$$\left. \frac{\partial \Phi(r)}{\partial r} \right|_{r=R} = \frac{GM(R)}{R^2} \tag{18}$$

球対称のときのポアソン方程式の「正しさ」は，これで実感できたかな？

## 2.3　潮汐力

潮の満ち引きはなぜおこるか？[7]

一般に，重力の「差」が（おおざっぱにいえば）潮汐力となる。

月による重力の強さ，地表と地球中心での差は

$$\frac{GM_{moon}}{(r-R_\oplus)^2} - \frac{GM_{moon}}{r^2} \approx 2\frac{GM_{moon}}{r^3}R_\oplus \tag{19}$$

地球による重力，平均海水面とそこから $a$ だけ盛り上がった場合の差は

$$\frac{GM_\oplus}{R_\oplus^2} - \frac{GM_\oplus}{(R_\oplus + a)^2} \approx 2\frac{GM_\oplus}{R_\oplus^3}a \tag{20}$$

これらが釣り合ってるとすると

$$\frac{M_{moon}}{r^3}R_\oplus = \frac{M_\oplus}{R_\oplus^3}a \tag{21}$$

$$M_{moon} = \frac{ar^3}{R_\oplus^4}M_\oplus \tag{22}$$

値を入れてみよう。$a \approx 50\mathrm{cm}$ でよいか？

## 2.4 ケプラーの第３法則：次元解析から

ケプラーの法則

1. 惑星の運動は楕円軌道を描く。
2. 面積速度一定
3. 各惑星の軌道の平均半径の３乗と公転周期の２乗の比は一定

惑星の運動は太陽による重力にのみ支配されているであろう。そうすると共通する量は

$$GM_\odot \tag{23}$$

であろう。ここで $M_\odot$ は太陽質量。

$$\frac{GM_\odot m}{r^2} \tag{24}$$

が力の次元を持つことから，$GM_\odot$ の次元は

$$(\text{長さ})^3/(\text{時間})^2 \tag{25}$$

したがって，個々の惑星の「軌道半径」の３乗割る「公転周期」の２乗は共通であろう，と推測される。これは後に再び確かめる。

# 3　アインシュタイン重力

ひととおりのお約束ごとは，学習していると仮定する。[12]

## 3.1　測地線

質量 $m$ の粒子を考える。粒子の作用 (action) は，世界線の長さに比例する。

$$I = -mc\int ds = -mc\int\sqrt{-g_{\mu\nu}\frac{dx^\mu}{d\tau}\frac{dx^\nu}{d\tau}}d\tau \tag{26}$$

計量 $g_{\mu\nu}$ は，座標で表した長さの「はかり方」をあらわす。

変分原理により，作用が極値となる運動が実現される。今の場合，世界線の長さ $(\int ds)$ が極値となると言っても良い。

Euler-Lagrange eq.

$$\frac{d}{d\tau}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{x}^\mu}\right) - \frac{\partial L}{\partial x^\mu} = 0 \tag{27}$$

（ここで

$$I = \int L d\tau \tag{28}$$

および

$$\dot{x}^\mu = \frac{dx^\mu}{d\tau} \tag{29}$$

）は今の場合以下のようになる。

$$\frac{d}{d\tau}\left(\frac{-g_{\mu\nu}}{\sqrt{-g_{\lambda\sigma}\dot{x}^\lambda\dot{x}^\sigma}}\frac{dx^\nu}{d\tau}\right) - \frac{-\frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^\mu}}{2\sqrt{-g_{\lambda\sigma}\dot{x}^\lambda\dot{x}^\sigma}}\frac{dx^\alpha}{d\tau}\frac{dx^\beta}{d\tau} = 0 \tag{30}$$

$$\frac{d}{ds}\left(g_{\mu\nu}\frac{dx^\nu}{ds}\right) - \frac{1}{2}\frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^\mu}\frac{dx^\alpha}{ds}\frac{dx^\beta}{ds} = 0 \tag{31}$$

$$g_{\mu\nu}\frac{d^2x^\nu}{ds^2} + \frac{\partial g_{\mu\beta}}{\partial x^\alpha}\frac{dx^\alpha}{ds}\frac{dx^\beta}{ds} - \frac{1}{2}\frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^\mu}\frac{dx^\alpha}{ds}\frac{dx^\beta}{ds} = 0 \tag{32}$$

計量の「逆」

$$g^{\lambda\mu}g_{\mu\nu} = \delta^\lambda_\nu \tag{33}$$

[12] そういえば，アインシュタインの規約はよろしいのでしょうか？

を使うと

$$\frac{d^2x^\lambda}{ds^2}+\Gamma^\lambda_{\alpha\beta}\frac{dx^\alpha}{ds}\frac{dx^\beta}{ds}=0 \tag{34}$$

と書ける。ただしここで (metric) connection $\Gamma^\lambda_{\alpha\beta}$ は

$$\Gamma^\lambda_{\alpha\beta}=\frac{1}{2}g^{\lambda\mu}\left(\frac{\partial g_{\mu\beta}}{\partial x^\alpha}+\frac{\partial g_{\alpha\mu}}{\partial x^\beta}-\frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^\mu}\right) \tag{35}$$

で与えられる。

(34) を「測地線の式」と呼ぶ。

時間空間をあわせて「時空」と呼ぶ。「時空」が「平坦」なとき $g_{\mu\nu}=\eta_{\mu\nu}$ と書き，

$$-ds^2=\eta_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu=-c^2dt^2+dx^2+dy^2+dz^2 \tag{36}$$

である。

さて測地線の式はいかにして重力が働いているときの粒子の運動を表すのか？ニュートン近似を考えてみる。粒子の速度は光速に比べて十分小さいとし，重力の大きさも弱いとする。

$$ds\approx cdt \tag{37}$$

なので

$$\frac{d^2x^i}{dt^2}+c^2\Gamma^i_{00}\approx 0 \tag{38}$$

また

$$\Gamma^i_{00}\approx -\frac{1}{2}\frac{\partial g_{00}}{\partial x^i} \tag{39}$$

であるから，ニュートンの運動方程式

$$\frac{d^2x^i}{dt^2}=-\frac{\partial\Phi}{\partial x^i} \tag{40}$$

とくらべると

$$g_{00}\approx -\left(1+\frac{2\Phi}{c^2}\right) \tag{41}$$

となっていればよい。

これが正しい意味を持っているかを確かめるため，最初の作用にニュートン近似を使ってみる。

$$I \;\approx\; -mc\int\sqrt{1+\frac{2\Phi}{c^2}-\frac{\mathbf{v}^2}{c^2}}cdt$$

$$
\begin{aligned}
&\approx \quad -mc\int\left(1-\frac{\mathbf{v}^2}{2c^2}+\frac{\Phi}{c^2}\right)cdt \\
&\approx \quad \int\left(-mc^2+\frac{1}{2}m\mathbf{v}^2-m\Phi\right)dt
\end{aligned}
\tag{42}
$$

確かに,（定数を除いて）ポテンシャルがある場合の古典力学の作用となっている。

## 3.2　アインシュタイン方程式

では，ポテンシャルを決める（12）に対応した式は何だろうか。それがアインシュタイン方程式である。

$$R_{\mu\nu}-\frac{1}{2}Rg_{\mu\nu}=\frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu} \tag{43}$$

ここで $R_{\mu\nu}$ はリッチ曲率，$R=g^{\mu\nu}R_{\mu\nu}$ はスカラー曲率と呼ばれる量である。

アインシュタイン方程式は次のようにも書ける。

$$R_{\mu\nu}=\frac{8\pi G}{c^4}\left(T_{\mu\nu}-\frac{1}{2}Tg_{\mu\nu}\right) \tag{44}$$

ただしここで $T\equiv T_{\mu\nu}g^{\mu\nu}$。

エネルギー運動量テンソル $T_{\mu\nu}$ の中身は後に詳しく調べるが，ニュートン近似では，圧力等は無視されて，

$$T_{00}\approx\rho c^2 \tag{45}$$

また

$$T\approx-\rho c^2 \tag{46}$$

である。

$$\Gamma^i_{00}\approx-\frac{1}{2}\frac{\partial g_{00}}{\partial x^i}=\frac{1}{c^2}\frac{\partial\Phi}{\partial x^i} \tag{47}$$

なので

$$R_{00}\approx\frac{\partial}{\partial x^i}\Gamma^i_{00}=\frac{1}{c^2}\nabla^2\Phi \tag{48}$$

より

$$\nabla^2\Phi=4\pi G\rho \tag{49}$$

を再現する。

# 4　軌道運動

## 4.1　円軌道 (N)

本当は，重心のまわりの相対運動を考えなくてはならないが，片方の質量が非常に大きいとして，それを中心とした軌道運動（等速円運動）を考える。

ex. 太陽-木星の重心はどこにあるか？

### 4.1.1　静止衛星

衛星の周期が地球の自転周期と同じ人工衛星。

ex. 静止衛星の地表からの高さはいかほどか？

### 4.1.2　第一宇宙速度

地表ぎりぎりの人工衛星の速さ。

$$\frac{v_{[1]}^2}{R_\oplus} = \frac{GM_\oplus}{R_\oplus^2} \tag{50}$$

より

$$v_{[1]} = \sqrt{\frac{GM_\oplus}{R_\oplus}} = \sqrt{gR_\oplus} \tag{51}$$

ex. どのくらいの値か？

### 4.1.3　第二宇宙速度

地球の重力に引かれてもどって来ないための，地表での最低速度。[13]
第二宇宙速度 ··· 約 $11.2$ km/s，音速の約３０倍

$$\frac{1}{2}v_{[2]}^2 - \frac{GM_\oplus}{R_\oplus} = 0 \tag{52}$$

全力学的エネルギーがゼロ ··· 無限遠に（ギリギリ）到達できる。

$$v_{[2]} = \sqrt{\frac{2GM_\oplus}{R_\oplus}} = \sqrt{2gR_\oplus} \tag{53}$$

ex. 大気中の分子の速度を第二宇宙速度と比べてみよう。

[13] 当然，打ち上げ後は推進力は使わないとする。

#### 4.1.4　第三宇宙速度

太陽の重力に引かれてもどって来ないための，地球軌道での最低速度。

$$\frac{1}{2}v_{[3]}^2 - \frac{GM_\odot}{R_{AU}} = 0 \tag{54}$$

$R_{AU}$ は（平均）地球公転軌道半径＝１天文単位。

$$v_{[3]} = \sqrt{\frac{2GM_\odot}{R_{AU}}} = \sqrt{2}\frac{2\pi R_{AU}}{T_{1年}} \tag{55}$$

というのは，間違い。
公転速度を持ってますからねえ。
正しく求めてください。

ex. どのくらいの値か？

#### 4.1.5　脱出速度

質量 $M$，半径 $R$ の天体からの脱出速度は

$$v_e = \sqrt{\frac{2GM}{R}} \tag{56}$$

ex. 太陽表面からの脱出速度は？　（約 620km/s）

ex. 一般の星表面で，脱出速度が「光速」となるときの条件は?

もちろん，光速に近い運動をニュートン力学では取り扱えないのだが ⋯

#### 4.1.6　ケプラーの第３法則

惑星の軌道を半径 $a$ の円軌道とする。

$$\frac{GM_\odot}{a^2} = \frac{v^2}{a} = a\omega^2 = a\left(\frac{2\pi}{T}\right) \tag{57}$$

$T$ は公転周期。
したがって

$$4\pi^2\frac{a^3}{T^2} = GM_\odot \tag{58}$$

衛星の運動から惑星の質量がわかる ⋯ などの応用に使える。

#### 4.1.7 スカイフック

ex. スカイフック（ハインラインによる）をつくろう。[18] 密度一様のロープの端が赤道上の有る地点にあり，垂直に延びている。ロープと地面は接着はしていない。ロープの長さはどれくらい？($1.5 \times 10^5$km)

## 4.2 楕円軌道 (N)

### 4.2.1 極座標で解く

軌道は $x$-$y$ 平面上にあるとする。
極座標 $r, \phi$ であらわす。

$$\begin{cases} x = r\cos\phi \\ y = r\sin\phi \end{cases} \tag{59}$$

エネルギー保存より

$$E = T + V = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\phi}^2) + V(r) \tag{60}$$

は一定。ここで，˙ は時間による微分を表す。
角運動量保存により

$$mr^2\dot{\phi} = \ell \tag{61}$$

は一定。
したがって

$$\dot{r}^2 = \frac{2}{m}\left(E - V(r) - \frac{\ell^2}{2mr^2}\right) \tag{62}$$

ただし

$$V(r) = -\frac{k}{r} = -\frac{GMm}{r} \tag{63}$$

この式の左辺は正なので，右辺も正となるような $r$ の値しかとりえない。

軌道を表す式は

$$\frac{dr}{d\phi} = \frac{\dot{r}}{\dot{\phi}} = \frac{mr^2}{\ell}\sqrt{\frac{2}{m}\left(E - V(r) - \frac{\ell^2}{2mr^2}\right)} \tag{64}$$

簡単のため，変数を変える。

$$u = \frac{1}{r} \tag{65}$$

すると

$$\frac{du}{d\phi} = -\sqrt{\frac{2mE}{\ell^2} + \frac{2mku}{\ell^2} - u^2} \tag{66}$$

積分（公式集）

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a + bx + cx^2}} = \frac{1}{\sqrt{-c}} \cos^{-1} \frac{-b + 2cx}{b^2 - 4ac} \tag{67}$$

を用いると

$$\phi = \phi_0 - \cos^{-1} \left[ \frac{\frac{\ell^2 u}{mk} - 1}{\sqrt{1 + \frac{2E\ell^2}{mk^2}}} \right] \tag{68}$$

または，以下のようにして解いても良い。

$$\left(\frac{du}{d\phi}\right)^2 = \frac{2mE}{\ell^2} + \frac{2mku}{\ell^2} - u^2 \tag{69}$$

の両辺を $\phi$ で微分した式より

$$\frac{d^2u}{d\phi^2} + u = \frac{mk}{\ell^2} \tag{70}$$

（これは単振動だ！$(u - mk/\ell^2)$）

いずれにせよ解は

$$\frac{1}{r} = C\left(1 + \epsilon \cos(\phi - \phi_0)\right) \tag{71}$$

$$C = \frac{mk}{\ell^2} = \frac{GMm^2}{\ell^2} \tag{72}$$

$$\epsilon = \sqrt{1 + \frac{2E\ell^2}{mk^2}} = \sqrt{1 + \frac{2E\ell^2}{G^2M^2m^3}} \tag{73}$$

$$E > 0 \rightarrow \epsilon > 1 \qquad \text{双曲線} \tag{74}$$

$$E = 0 \rightarrow \epsilon = 1 \qquad \text{放物線} \tag{75}$$

$$E < 0 \rightarrow \epsilon < 1 \qquad \text{楕円} \quad （\epsilon = 0 \text{ 円}） \tag{76}$$

となっている。
$\epsilon$ は（特に楕円の場合），離心率と呼ばれる。

前にも述べたが，２体の運動は正確には重心系で取り扱うべきである。特に二重星等の運動については，明らかである。惑星系について，他の惑星の重力による摂動が重要なのも言うまでもない。
２体の運動のより詳しい分析は [1][9] などを見よ。軌道面が不変であることをきちんと証明している。[14]
ニュートンはプリンキピアにおいて，幾何学的導出をしている。ファインマン [10] を読め。また，チャンドラセカールによる解説も参照。

・引力が逆自乗でない場合の検討は [12] を見よ。

ex. 中心力（引力）による運動で，質点の軌道が $r = 2a\cos\phi$ で表されるとき，力の大きさは $1/r^5$ に比例することを示せ。

#### 4.2.2　楕円

$E < 0$ のとき
$r$ の最大値

$$r_{max} = C^{-1}(1-\epsilon)^{-1} \tag{77}$$

$r$ の最小値

$$r_{min} = C^{-1}(1+\epsilon)^{-1} \tag{78}$$

$$a = \frac{r_{max} + r_{min}}{2} = C^{-1}\left(1-\epsilon^2\right)^{-1} \tag{79}$$

$a$ は軌道半長径，あるいは平均軌道半径とよばれる。
$\phi_0 = 0$ とすると

$$\frac{(r\cos\phi + a\epsilon)^2}{a^2} + \frac{(r\sin\phi)^2}{b^2} = \frac{(x+a\epsilon)^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \tag{80}$$

ここで

$$b = \sqrt{1-\epsilon^2}\,a \tag{81}$$

これは楕円の表現の，もうひとつの形。

[14] ぼくも思わずベクトルを使いたくなった。

### 4.2.3　ケプラーの第三法則 (N)

角運動量保存則から

$$\frac{1}{2}r^2\dot{\phi} = \frac{\ell}{2m} \tag{82}$$

これを積分することにより，軌道（に囲まれた）面積が求められる。

$$\int_0^T \frac{1}{2}r^2\dot{\phi}dt = \pi ab = \frac{\ell}{2m}T \tag{83}$$

$T$ は（公転）周期。
$b$ をうまく消去すると

$$\frac{\ell}{2m}T = \pi ab = \pi a^{3/2}\sqrt{\frac{\ell^2}{mk}} \tag{84}$$

となり，すなわち

$$T = 2\pi a^{3/2}\sqrt{\frac{m}{k}} = \frac{2\pi}{\sqrt{GM_\odot}}a^{3/2} \tag{85}$$

$$GM_\odot = 4\pi^2\frac{a^3}{T^2} \tag{86}$$

ケプラーの第 3 法則を得た。$a$ のみを用い，離心率を含まない表現になっている。

## 4.3　一様密度

一様質量密度 $\rho_0$ をもつ球状の星を考えよう。これを「地球」とする。

$$F_r = -\frac{GMm}{r^2} \tag{87}$$

中心から $r$ の球内部に含まれる質量は

$$M = \frac{4\pi}{3}r^3\rho_0 \tag{88}$$

なので

$$F_r = -\frac{4\pi Gm}{3}\rho_0 r \tag{89}$$

$$V(r) = m\Phi(r) = \frac{1}{2}\frac{4\pi Gm}{3}\rho_0 r^2 \tag{90}$$

単振動をおこすポテンシャルである。角振動数は地球では

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{R_\oplus}} \approx 1.2 \times 10^{-3}\mathrm{s}^{-1} \tag{91}$$

一般に楕円軌道であるが，中心は両焦点の中点（「中心」）。地球内部にある限りどんな軌道でも，同じ周期をもつ。この周期は，地表すれすれの人工衛星とも同じ。（約８５分で一周。）

ex. (future ex.) 相対論では？(一様密度の星，測地線の式，を解く。)

ex. 直線のトンネルを掘ったとき（必ずしも中心を通らない），その中を重力によって運動する物体は片道どのくらいの時間で通過するか？摩擦は無視する。

## 4.4 惑星の軌道 (R)

### 4.4.1 軌道の式 (R)

アインシュタインの重力理論＝一般相対論で考察する。ニュートンの重力とどのようにどのくらい違ってくるのか。

ニュートン近似では一致しそうなことは既に見た。

したがって，厳密な時空の計量の解[15] を使う。

質量 $M$ の球対称な星のまわり（外側）の時空は次の真空球対称解で表される。

$$-ds^2 = -\left(1 - \frac{r_g}{r}\right) c^2 dt^2 + \frac{1}{1 - \frac{r_g}{r}} dr^2 + r^2 \left(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2\right) \tag{92}$$

ここで

$$r_g \equiv \frac{2GM}{c^2} \tag{93}$$

である。この解をシュヴァルツシルト解といい，$r_g$ をシュヴァルツシルト半径，またはときに重力半径と呼ぶ。

軌道は赤道面上（$\theta = \pi/2$）にあると仮定する。

測地線の式から，以下の３つの式が得られる。

[15] アインシュタイン方程式の解

その１：

$$\left(1-\frac{r_g}{r}\right)c\dot{t}=\frac{E_R}{mc^2} \tag{94}$$

これはエネルギー保存に対応。ここでの $\dot{}$ は $s$ による微分を表す。

その２：

$$r^2\dot{\phi}=\frac{\ell}{mc} \tag{95}$$

これは角運動量保存に対応。

その３：（その１，その２をつかって）

$$-\frac{E_R^2/(m^2c^4)}{1-\frac{r_g}{r}}+\frac{\dot{r}^2}{1-\frac{r_g}{r}}+\frac{\ell^2}{m^2c^2r^2}=-1 \tag{96}$$

すなわち

$$\dot{r}^2=\frac{E_R^2}{m^2c^4}-\left(1-\frac{r_g}{r}\right)-\frac{\ell^2}{m^2c^2r^2}\left(1-\frac{r_g}{r}\right) \tag{97}$$

この左辺は正だから，右辺が正になるような $r$ の範囲しか動けない。((N) のときと比べよう。)

軌道の形を表す式

$$-\frac{r^4E_R^2/(\ell^2c^2)}{1-\frac{r_g}{r}}+\frac{1}{1-\frac{r_g}{r}}\frac{\dot{r}^2}{\dot{\phi}^2}+r^2=-\frac{r^4m^2c^2}{\ell^2} \tag{98}$$

$$\frac{1}{r^4}\left(\frac{dr}{d\phi}\right)^2+\frac{1}{r^2}=\frac{E_R^2-m^2c^4}{\ell^2c^2}+\frac{m^2c^2r_g}{\ell^2r}+\frac{r_g}{r^3} \tag{99}$$

$$\left(\frac{du}{d\phi}\right)^2+u^2=\frac{2mE}{\ell^2}+\frac{2mku}{\ell^2}+r_gu^3 \tag{100}$$

最後の項が「一般相対論的効果」。[16]

### 4.4.2 水星近日点の移動

水星近日点の移動 … 他の惑星の摂動などのニュートン重力で説明できない分は，１００年当たり４３秒であることが知られていた。

ここでの近似法は主に [13] による。

[16] 「空間の曲がっている」効果であることに注意

前式を一回微分して

$$\frac{d^2u}{d\phi^2}+u-\frac{3}{2}r_g u^2=\frac{mk}{\ell^2} \tag{101}$$

これの解を展開で求める。

$$u=u_0+u_1+\cdots \tag{102}$$

ここで

$$u_0=C(1+\epsilon\cos\phi) \tag{103}$$

は無摂動解であり，

$$|u_1|\approx r_g/a^2<<|u_0| \tag{104}$$

は摂動による小さなずれ。

方程式に代入して展開の１次で

$$\begin{aligned}\frac{d^2u_1}{d\phi^2}+u_1 &= \frac{3}{2}r_g C^2(1+\epsilon\cos\phi)^2 \\ &= \frac{3}{2}r_g C^2(1+\epsilon^2/2)+3r_g C^2\epsilon\cos\phi+\frac{3}{4}r_g C^2\epsilon^2\cos 2\phi\end{aligned} \tag{105}$$

この方程式の解は

$$u_1=\frac{3}{2}r_g C^2(1+\epsilon^2/2)+\frac{3}{2}r_g C^2\epsilon\phi\sin\phi-\frac{1}{4}r_g C^2\epsilon^2\cos 2\phi \tag{106}$$

周期的な部分は，軌道の形には関係するが，近日点移動には寄与しない。したがって周期的でない部分を取り入れて

$$\begin{aligned}u &\approx C(1+\epsilon\cos\phi)+\frac{3}{2}r_g C^2\epsilon\phi\sin\phi \\ &\approx C\left(1+\epsilon\cos\phi+\frac{3}{2}r_g C\epsilon\phi\sin\phi\right) \\ &\approx C\left(1+\epsilon\cos\left[\phi\left(1-\frac{3}{2}r_g C\right)\right]\right)\end{aligned} \tag{107}$$

と近似できる。

近日点に戻るまでに

$$\frac{2\pi}{1-\frac{3}{2}r_g C}\approx 2\pi\left(1+\frac{3}{2}r_g C\right) \tag{108}$$

の角度進まなければならない。したがって近日点の位置は角度

$$\Delta\phi=\frac{6\pi GM_\odot}{(1-\epsilon^2)ac^2} \tag{109}$$

だけ一周期毎に進んでいくことになる。

ex. 値を入れてみよ。

## 4.5 光の軌道 (R)

**光線の軌道**

$$\left(1-\frac{r_g}{r}\right)c\dot{t}=E \tag{110}$$

$$r^2\dot{\phi}=L \tag{111}$$

$ds^2=0$ より

$$-\frac{E^2}{1-\frac{r_g}{r}}+\frac{\dot{r}^2}{1-\frac{r_g}{r}}+\frac{L^2}{r^2}=0 \tag{112}$$

$$\dot{r}^2=E^2-\frac{L^2}{r^2}\left(1-\frac{r_g}{r}\right) \tag{113}$$

ex. 光線が円軌道を描くことは可能か？

<u>ホライズン近くの解</u>

$$\frac{d\phi}{dt}=\left(1-\frac{r_g}{r}\right)\frac{\lambda}{r^2} \tag{114}$$

$$\frac{dr}{dt}=-\left(1-\frac{r_g}{r}\right)\sqrt{1-\left(1-\frac{r_g}{r}\right)\frac{\lambda^2}{r^2}} \tag{115}$$

ここで $\lambda=L/E$。

$r=r_g+\Delta$，$\Delta<<r_g$ とすると

$$\frac{d\phi}{dt}=\frac{\lambda}{r_g^3}\Delta \tag{116}$$

$$\frac{d\Delta}{dt}=-\frac{\Delta}{r_g}\sqrt{1-\frac{\lambda^2}{r_g^3}\Delta} \tag{117}$$

この解は

$$\phi=\frac{2r_g}{\lambda}\tanh\frac{t}{2r_g} \tag{118}$$

$$\Delta=\frac{r_g^3/\lambda^2}{\cosh^2\frac{t}{2r_g}} \tag{119}$$

軌道を表す式は

$$\left(\frac{du}{d\phi}\right)^2 + u^2 = \frac{1}{b^2} + r_g u^3 \tag{120}$$

となる。前と同様に $u = 1/r$ とし，$b = |L/E|$ である。

一回微分すると

$$\frac{d^2u}{d\phi^2} + u = \frac{3}{2} r_g u^2 \tag{121}$$

前と同じく展開で求める。

$$u = u_0 + u_1 + \cdots \tag{122}$$

ここで

$$u_0 = \frac{\sin\phi}{b} \tag{123}$$

は無摂動解（原点から $b$ 離れた直線！）であり，

$$|u_1| \approx r_g/b^2 << |u_0| \tag{124}$$

は摂動による小さなずれ。

方程式に代入して展開の 1 次で

$$\frac{d^2u_1}{d\phi^2} + u_1 = \frac{3}{2} r_g \frac{\sin^2\phi}{b^2} \tag{125}$$

この方程式の解は

$$u_1 = \frac{1}{2}\frac{r_g}{b^2}(1 + C_0\cos\phi + \cos^2\phi) \tag{126}$$

ここで $C_0$ は任意定数。

$u_0$ は $\phi$ が $0$ および $\pi$ で $0$，即ち無限遠に達している。摂動解では，$-\theta_1$ および $\pi + \theta_2$ で $0$ になるとする。ここで $\theta_1, \theta_2$ はともに小さい正の角度であることが期待される。

$$-\frac{\theta_1}{b} + \frac{1}{2}\frac{r_g}{b^2}(2 + C_0) = 0 \tag{127}$$

$$-\frac{\theta_2}{b} + \frac{1}{2}\frac{r_g}{b^2}(2 - C_0) = 0 \tag{128}$$

結局，直線から $\Delta\theta$ だけ曲がる。これは

$$\Delta\theta = \theta_1 + \theta_2 = 2\frac{r_g}{b} \tag{129}$$

とかける。

　太陽による光の曲がりで，一番曲がるのは太陽表面すれすれを通る光なので

$$\Delta\theta = \frac{4GM_{\odot}}{R_{\odot}c^2} \approx 1.75'' \tag{130}$$

日食時に背後の恒星の位置がずれて見える。（別の時の写真と比較）

　電波源でも観測できる。

　銀河の質量により背後の銀河が歪んで，また時に明るく，また複数に見えるような現象を重力レンズ現象（効果）といい，最近多数の例が見つかっている。

# 5　星を形作る重力

## 5.1　星とニュートン重力

### 5.1.1　静水平衡

星は，（近似的に）球対称自己重力系である。物質の対流，星からの放射，激しい変動および回転はここでは考えない。まず，ニュートン的に考察する。

静的な星の内部では，圧力勾配と重力のつり合いが成り立っている（静水（圧）平衡）。（例えば，[2] 参照。）

圧力勾配と重力のつり合いは，以下の式にまとめられる。

$$\frac{dP}{dr} = -\frac{GM(r)}{r^2}\rho \tag{131}$$

$$\frac{dM}{dr} = 4\pi r^2 \rho(r) \tag{132}$$

これらの式と，状態方程式（圧力 $P$ と質量密度 $\rho$ の間の関係式）があれば，星の構造を決めることができる。

大雑把に評価すると，

$$\frac{P_c}{R} \approx \frac{GM\rho_c}{R^2} \tag{133}$$

ここで，$R$ は星の半径，

$$M \approx \frac{4\pi}{3} R^3 \rho_c \tag{134}$$

は星の質量。圧力と質量密度は中心での値（または平均値）で代表する。

このとき星の質量は

$$M \approx \sqrt{\frac{P_c^3}{G^3\rho_c^4}} \tag{135}$$

また星の半径は

$$R \approx \sqrt{\frac{P_c}{G\rho_c^2}} \tag{136}$$

と見積もることができる。

<u>例</u>

・光の圧力が効くとき（密度が小さい）

$$P_c = \text{一定} \tag{137}$$

$$M \propto \frac{1}{\rho_c^2} \tag{138}$$

・気体の圧力が効くとき

$$P_c \approx \rho_c \tag{139}$$

$$M \propto \frac{1}{\sqrt{\rho_c}} \tag{140}$$

ex. 太陽の場合，

$$P \approx \frac{\rho}{m_H} kT \tag{141}$$

$$M_\odot = \frac{R_\odot kT}{G m_H} \tag{142}$$

値を入れてみよう。温度は？

#### 5.1.2 ポリトロープ

状態方程式が次の形で与えられるときをポリトロープという。

$$P = K\rho^{1+1/N} \tag{143}$$

（$K$ は定数。）

静水平衡の式から

$$\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(\frac{r^2}{\rho}\frac{dP}{dr}\right) = -4\pi G\rho(r) \tag{144}$$

を得るので，これにポリトロープ型の状態方程式を代入する。その際，次のような変数を選ぶことにする。

$$\rho(r) = \rho_c \phi^N(r), \quad \rho_c = \rho(0), \quad \phi(0) = 1 \tag{145}$$

われわれは次の式を得る。

$$(N+1)K\rho_c^{1/N}\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{d\phi}{dr}\right) = -4\pi G\rho_c\phi^N(r) \tag{146}$$

さらに

$$a \equiv \sqrt{\frac{(N+1)K\rho_c^{1/N-1}}{4\pi G}} \tag{147}$$

$$\xi \equiv r/a \tag{148}$$

とおくと

Lane-Emden equation

$$\frac{1}{\xi^2}\frac{d}{d\xi}\left(\xi^2\frac{d\phi}{d\xi}\right)=-\phi^N \qquad (\phi(0)=1) \tag{149}$$

を得る。

$N=0,1,5$ のときには，解析的な解が知られている。

・$N=0$ 密度一定の星

$$\phi(\xi)=1-\frac{1}{6}\xi^2 \tag{150}$$

・$N=1$

$$\phi(\xi)=\frac{\sin\xi}{\xi} \tag{151}$$

・$N=5$

$$\phi(\xi)=(1+\xi^2/3)^{-1/2} \tag{152}$$

また，等温球と呼ばれるものでは $P\propto\rho$ の関係があり，Lane-Emden 方程式の $N=\infty$ に対応する。この場合は，境界条件を無視すれば特殊な解として $\rho\propto r^{-2}$ が得られる。[17]

星の表面は

$$\phi(\xi_0)=0 \tag{153}$$

となる $\xi_0$ に対応するので星の半径は

$$R_\star=a\xi_0 \tag{154}$$

で与えられる。

半径 $\xi$ までに含まれる質量は

$$\begin{aligned} M(\xi) &= \int_0^\xi 4\pi a^3\rho_c\phi^N(\xi')\xi'^2 d\xi' \\ &= -4\pi a^3\rho_c\int_0^\xi \frac{d}{d\xi'}\xi'^2\frac{d\phi(\xi')}{d\xi'}d\xi' \\ &= -4\pi a^3\rho_c\xi^2\frac{d\phi(\xi)}{d\xi} \end{aligned} \tag{155}$$

[17] 漸近的には等温球は同じ振る舞いをする。

なので，星の質量は

$$M_\star = M(\xi_0) = -4\pi a^3 \rho_c {\xi_0}^2 \left. \frac{d\phi(\xi)}{d\xi} \right|_{\xi=\xi_0} \tag{156}$$

となる。

ex. $N = 3$ のとき，星の質量は中心密度によらないことを示せ。

ex. $N = 0, 1, 5$ のとき，星の半径と質量を求めよ。
おのおのの場合に，半径-質量の関係をグラフにせよ。

## 5.2 縮退した星 (N)

電子のようなフェルミ粒子（フェルミオン）は，低温で縮退という現象を起こす。フェルミ粒子は同一の状態は1つの粒子しか占有できないため，温度がゼロの場合でもフェルミ粒子の気体は圧力（縮退圧）をもつ。

白色わい星は，電子の縮退圧によって支えられている。

ここでは簡単のため陽子と電子の数がほぼ等しいとする。

電子の密度（$\approx$ 陽子の密度）は[18]

$$n \approx p_F^3/\hbar^3 \tag{157}$$

ここで $p_F$ はフェルミ運動量（電子の集まりの中での最大の運動量）である。

質量密度は，陽子の寄与が圧倒的なので

$$\rho \approx m_p n \tag{158}$$

となる。$m_p$ は陽子の質量。

圧力はほとんど電子の縮退圧である。圧力はおおよそ粒子の運動エネルギーに比例すると思って良い。

・非相対論的な場合（比較的低密度）では

$$P \approx n p_F^2/m_e \approx \frac{\hbar^2}{m_e m_p^{5/3}} \rho^{5/3} \tag{159}$$

[18] 位相空間の $\hbar^3$ の体積中に1個あると数える。（スピンの自由度を無視した。）

（$m_e$ は電子の質量）

・相対論的な場合（比較的高密度）では

$$P \approx np_F c \approx \frac{\hbar c}{m_p^{4/3}} \rho^{4/3} \tag{160}$$

ex. それぞれの場合，ポリトロープの $N$ はいくつに対応するか。

ex. 密度と圧力の厳密な表現を調べてみよう。

中心密度が比較的低ければ，

$$P_c \propto \rho_c^{5/3} \tag{161}$$

なので，白色わい星の質量は

$$M \propto \sqrt{\rho_c} \tag{162}$$

高密度の場合は

$$P_c \propto \rho_c^{4/3} \tag{163}$$

より

$$M \approx \frac{1}{m_p^2} \left( \frac{\hbar c}{G} \right)^{3/2} = \frac{M_{pl}^3}{m_p^2} = \text{一定} \tag{164}$$

となる。ここで $M_{pl}$ はプランク質量と呼ばれる。

中心密度を高くしても，星の質量には最大値があるということである。つまり，これ以上大きな質量の白色わい星は（安定には）存在できない。

精密な計算では最大質量は

$$M_{Ch} = 1.4 M_\odot \tag{165}$$

となり，これをチャンドラセカール質量と呼ぶ。

ex. 以下のようにしても評価できることを確かめよ。

星の力学的エネルギーは

$$E \approx nR^3 E_k - \frac{GM^2}{R} \tag{166}$$

ここで $R$ は星の半径，

粒子当たりの運動エネルギーは

$$E_k \approx \frac{p_F^2}{m_e} \tag{167}$$

（非相対論的）

$$E_k \approx p_F c \tag{168}$$

（相対論的）

エネルギーが最も低くなるように $R$ を決定する。

同様に，中性子が縮退している場合，中性子星を形成することができる。

### 5.3 星の振動 (N)

星の微小な振動を考えてみる。[2]
$r$ の位置に質点を置く。運動方程式は

$$\frac{d^2r}{dt^2} = -\frac{GM}{r^2} \tag{169}$$

星は一様密度で近似する。

$$M = \frac{4\pi}{3} r^3 \rho \tag{170}$$

すると

$$\frac{d^2r}{dt^2} = -\frac{4\pi G\rho r}{3} \tag{171}$$

単振動となることがわかる。
振動の周期は

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{3}{4\pi G\rho}} \propto \frac{1}{\sqrt{G\rho}} \tag{172}$$

ex. 以下の場合，振動の周期はどれくらいか。

白色わい星（$1M_\odot$, 10000km）

中性子星（$1M_\odot$, 10km）

## 5.4 星の自転 (N)

星が自転している場合，遠心力が表面重力を越えることはないので [8]

$$R\omega^2 < \frac{GM}{R^2} \tag{173}$$

星が一様密度とすると

$$M = \frac{4\pi}{3}R^3\rho \tag{174}$$

密度に下限がつく。

$$\rho > \frac{3}{4\pi}\frac{\omega^2}{G} \tag{175}$$

周期 $1.56 \times 10^{-3}\mathrm{s}$ のパルサーでは

$$\omega = \frac{2\pi}{1.56 \times 10^{-3}\mathrm{s}} = 4.0 \times 10^3 \mathrm{s}^{-1} \tag{176}$$

なので

$$\rho > 5.7 \times 10^{10} \mathrm{kg/cm}^3 \tag{177}$$

## 5.5 一般相対論的星

球対称な計量

$$-ds^2 = -e^{-2\delta}\Delta dt^2 + \frac{dr^2}{\Delta} + r^2\left(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2\right) \tag{178}$$

を仮定する。$\Delta, \delta$ は $r$ のみの関数と仮定する。

### 5.5.1 Einstein tensor

Einstein tensor は次のように定義される。

$$G^\mu_\nu \equiv R^\mu_\nu - \frac{1}{2}R\delta^\mu_\nu \tag{179}$$

先の計量から計算すると（Appendix）

$$\begin{aligned} G^0_0 &= 2\left\{\sqrt{\Delta}\left[\frac{\sqrt{\Delta}}{r}\right]' + \left[\frac{\sqrt{\Delta}}{r}\right]^2\right\} - \left\{\frac{1}{r^2} - \left[\frac{\sqrt{\Delta}}{r}\right]^2\right\} \\ &= \frac{1}{r}\Delta' + \frac{\Delta - 1}{r^2} \end{aligned} \tag{180}$$

$$
\begin{aligned}
G^0_0 - G^1_1 &= R^0_0 - R^1_1 \\
&= -2\left[\sqrt{\Delta}\left(-\delta' + \frac{1}{2}\frac{\Delta'}{\Delta}\right)\right]\left[\frac{\sqrt{\Delta}}{r}\right] \\
&+ 2\left\{\sqrt{\Delta}\left[\frac{\sqrt{\Delta}}{r}\right]' + \left[\frac{\sqrt{\Delta}}{r}\right]^2\right\} \\
&= \Delta\frac{2}{r}\delta' \qquad (181)
\end{aligned}
$$

ここで，$'$ は $r$ による微分を表す。

Einstein equation は次のようになっている。

$$G^\mu_\nu = R^\mu_\nu - \frac{1}{2}R\delta^\mu_\nu = \frac{8\pi G}{c^4}T^\mu_\nu \qquad (182)$$

$$R^\mu_\nu = \frac{8\pi G}{c^4}\left(T^\mu_\nu - \frac{1}{2}T\delta^\mu_\nu\right) \qquad (183)$$

ここで，完全流体 (perfect fluid) を仮定すると

$$T^\mu_\nu = diag.\left(-\rho c^2, P, P, P\right) \qquad (184)$$

また

$$T = T^\mu_\mu = -\rho c^2 + 3P \qquad (185)$$

である。

完全流体の場合，アインシュタイン方程式から

$$
\begin{aligned}
G^0_0 &= -\frac{8\pi G}{c^2}\rho \qquad (186) \\
G^0_0 - G^1_1 &= -\frac{8\pi G}{c^2}\left(\rho + \frac{P}{c^2}\right) \qquad (187)
\end{aligned}
$$

を得，今の場合

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{r}\Delta' + \frac{\Delta - 1}{r^2} &= -\frac{8\pi G}{c^2}\rho \qquad (188) \\
\Delta\left[\frac{2}{r}\delta'\right] &= -\frac{8\pi G}{c^2}\left(\rho + \frac{P}{c^2}\right) \qquad (189)
\end{aligned}
$$

となる。[19]

[19] 真空（$\rho c^2 = P = 0$）のとき，シュヴァルツシルト解が得られる。

#### 5.5.2　保存の式

　エネルギー運動量の保存（conservation）の式（あるいは力学的平衡の式）

$$\nabla_\mu T^{\mu\nu} = 0 \tag{190}$$

を適用してみる。[20]　（この式は，アインシュタイン方程式からも導かれる。）

　書き換えると

$$\begin{aligned} \nabla_\mu T^{\mu\nu} &= \partial_\mu T^{\mu\nu} + \Gamma^\mu_{\mu\sigma} T^{\sigma\nu} + \Gamma^\nu_{\mu\sigma} T^{\mu\sigma} \\ &= \frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_\mu \left( \sqrt{-g} T^{\mu\nu} \right) + \Gamma^\nu_{\mu\sigma} T^{\mu\sigma} \end{aligned} \tag{192}$$

　ここで

$$\frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_\mu \sqrt{-g} = \frac{1}{2} g^{\lambda\sigma} \partial_\mu g_{\lambda\sigma} = \Gamma^\lambda_{\mu\lambda} \tag{193}$$

を使った。

$$T^{tt} = \frac{1}{e^{-2\delta}\Delta} \rho c^2 \tag{194}$$

$$T^{rr} = \Delta P \tag{195}$$

$$T^{ij} = \frac{1}{r^2} \tilde{g}^{ij} P \tag{196}$$

$$\tag{197}$$

および

$$\Gamma^r_{tt} = e^{-2\delta} \Delta^2 \left( -\delta' + \frac{1}{2} \frac{\Delta'}{\Delta} \right) \tag{198}$$

$$\Gamma^r_{rr} = -\frac{1}{2} \frac{\Delta'}{\Delta} \tag{199}$$

$$\Gamma^r_{ij} = -\Delta r \tilde{g}_{ij} \tag{200}$$

$$\tag{201}$$

などを使うと，[21]　保存の式

$$\nabla_\mu T^{\mu r} = 0 \tag{202}$$

[20]

$$\nabla_\lambda T^{\mu\nu} = \partial_\lambda T^{\mu\nu} + \Gamma^\mu_{\lambda\sigma} T^{\sigma\nu} + \Gamma^\nu_{\lambda\sigma} T^{\mu\sigma} \tag{191}$$

[21] $\tilde{g}_{ij} dx^i dx^j = d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2$

は次のようになる。

$$P' + \left(-\delta' + \frac{1}{2}\frac{\Delta'}{\Delta}\right)\left(\rho c^2 + P\right) = 0 \tag{203}$$

### 5.5.3 TOV 方程式

アインシュタイン方程式とあわせると，

$$-P' = \frac{4\pi G}{\Delta} r \left(\frac{1}{8\pi G}\frac{1-\Delta}{r^2} + \frac{P}{c^4}\right)\left(\rho c^2 + P\right) \tag{204}$$

を得る。

$$\Delta = 1 - \frac{2GM_r}{c^2 r} \tag{205}$$

とおくことにより

トールマン-オッペンハイマー-ヴォルコフ (TOV) 方程式

$$-P' = \frac{4\pi G\ r}{1-\frac{2GM_r}{c^2 r}}\left(\frac{M_r}{4\pi r^3} + \frac{P}{c^2}\right)\left(\rho + \frac{P}{c^2}\right) \tag{206}$$

が得られる。

ニュートン近似では

$$-P' = \frac{GM_r}{r^2}\rho \tag{207}$$

を得る。ここで

$$M_r(r) = 4\pi \int_0^r \rho(r') r'^2 dr' \tag{208}$$

である。

TOV 方程式は，一般相対論的な静水平衡の式である。

### 5.5.4 一様密度の星 (R)

密度が一定値 $\rho_0$ のときに，TOV 方程式を解いてみよう。

$$M_r(r) = \frac{4\pi}{3}\rho_0 r^3 \tag{209}$$

となることに注意すると，

$$\frac{P(r) + \rho_0 c^2}{3P(r) + \rho_0 c^2} = \frac{\sqrt{1-\frac{r_g}{R}}}{\sqrt{1-\frac{r_g r^2}{R^3}}} \tag{210}$$

と解ける。ただしここで $P(R)=0$ となる $R$ が星の半径，$r_g=\frac{2G}{c^2}\frac{4\pi}{3}\rho_0 R^3=\frac{2GM_*}{c^2}$ とした。

ex. 非相対論的ポリトロープ $N=0$ の場合と比較せよ。

(210) の左辺は $1/3$ 以上であるので，星の半径には下限があり

$$R>\frac{9}{8}r_g \tag{211}$$

である。

計量は次のようになる。（ただし，$r<R$)

$$\begin{aligned}-ds^2 &= -\frac{1}{4}\left[3\sqrt{1-\frac{r_g}{R}}-\sqrt{1-\frac{r_g r^2}{R^3}}\right]^2 c^2dt^2\\ &+ \frac{dr^2}{1-\frac{r_g r^2}{R^3}}+r^2(d\theta^2+\sin^2\theta d\phi^2)\end{aligned} \tag{212}$$

ex. 星内部での粒子の運動は，ニュートン力学の場合とどう違ってくるか？

### 5.5.5 中性子星 (R)

一般相対論的に中性子星について TOV 方程式を解くと（オッペンハイマー-ヴォルコフ），質量に上限があることがわかる。
その値はオーダー的にはチャンドラセカール質量と同様に

$$M\approx\frac{M_{pl}^3}{m_n^2} \tag{213}$$

であり,（$m_n$ は中性子の質量）中性子等の相互作用を無視して中性子の縮退圧のみを考えると

$$M\approx 0.7M_\odot \tag{214}$$

である。（相互作用などを入れると，チャンドラセカール質量とほぼ同じくらいになる。）

一般に，縮退したフェルミオン（質量 $m_F$）からなる星を「フェルミオンスター」と呼び，その質量は

$$M_{FS}\approx\frac{M_{pl}^3}{m_F^2} \tag{215}$$

の程度である。

### 5.6 ボゾンスター (N)

一方，ボーズ粒子（ボゾン）からなる星を「ボゾンスター」[15] と呼ぶ。ここではニュートン的な取り扱いをしてみる。

非相対論的ハミルトニアン密度が次のようであるとする。

$$\mathcal{H} = \frac{\hbar^2}{2m_B}|\nabla\psi|^2 + m_B\Phi|\psi|^2 + \frac{1}{8\pi G}(\nabla\Phi)^2 + \frac{1}{4}\frac{\hbar^3}{m_B^2 c}g|\psi|^4 \tag{216}$$

$g$ はボゾンの自己相互作用を表す。

方程式は

$$\nabla^2\Phi = 4\pi G m_B|\psi|^2 \tag{217}$$

$$-\frac{\hbar^2}{2m_B}\nabla^2\psi + m_B\Phi\psi + \frac{1}{2}\frac{\hbar^3}{m_B^2 c}g|\psi|^2\psi = \mu\psi \tag{218}$$

である。[22]

規格化は以下のようにする。

$$\int d^3\mathbf{r}|\psi|^2 = N_B \tag{219}$$

ここで，$N_B$ は粒子数。

#### 5.6.1 $g = 0$ のとき

まず，自己相互作用のない場合を考察する。数値的に方程式を解いても良いが，以下のように評価してみる。

まず球対称な半径 $R$ の星が形成されるとすると，その束縛エネルギーは

$$E_b \approx \frac{\hbar^2}{2m_B}\frac{N_B}{R^2} - \frac{GN_B^2 m_B^2}{R} \tag{220}$$

となろう。これが最も低くなるのは $R = R_m$ のときで

$$R_m \approx \frac{\hbar^2}{GN_B m_B^3} \tag{221}$$

である。

[22] $\mu$ はエネルギー固有値，あるいは化学ポテンシャルと思っても良い。

　このとき

$$E_b \approx -\frac{G^2 N_B^3 m_B^5}{2\hbar^2} \tag{222}$$

であるから，エネルギーと質量の等価（$E = mc^2$）より，星の質量は

$$M \approx N_B m_B - \frac{G^2 N_B^3 m_B^5}{2\hbar^2 c^2} \tag{223}$$

となる。

　さらにこれが最大となるように粒子数を決めると，粒子数が

$$N_{B*} \approx \frac{\hbar c}{G m_B^2} = \frac{M_{pl}^2}{m_B^2} \tag{224}$$

のときに星の質量は最大となる。

　このときの質量は

$$M_* \approx \frac{\hbar c}{G m_B} = \frac{M_{pl}^2}{m_B} \tag{225}$$

　また星の半径は

$$R_* \approx \frac{\hbar}{m_B c} \tag{226}$$

これは，質量 $m_B$ の粒子のコンプトン波長！

　まさに量子力学的不確定性からくる「圧力」で星は支えられている。

### 5.6.2　$g$ がおおきいとき

　変数を変える。

$$\tilde{\mathbf{r}} \equiv \frac{m_B c}{\hbar}\mathbf{r}, \quad \tilde{\psi} \equiv \sqrt{\frac{4\pi G\hbar^2}{m_B c^4}}\psi, \quad \tilde{\Phi} \equiv \frac{\Phi}{c^2} \tag{227}$$

このとき

$$\tilde{\nabla}^2 \tilde{\Phi} = |\tilde{\psi}|^2 \tag{228}$$

$$-\frac{1}{2}\tilde{\nabla}^2\tilde{\psi} + \tilde{\Phi}\tilde{\psi} + \frac{M_{pl}^2}{8\pi m_B^2} g|\tilde{\psi}|^2\tilde{\psi} = \tilde{\mu}\tilde{\psi} \tag{229}$$

ここで

$$\tilde{g} \equiv \frac{M_{pl}^2}{8\pi m_B^2} g \tag{230}$$

とおき，さらに

$$\mathbf{r}_* \equiv \frac{1}{\sqrt{\tilde{g}}}\tilde{\mathbf{r}}, \quad \psi_* \equiv \sqrt{\tilde{g}}\tilde{\psi} \tag{231}$$

と変数を変えると

$$\nabla_*^2\tilde{\Phi} = |\psi_*|^2 \tag{232}$$

$$-\frac{1}{2\tilde{g}}\nabla_*^2\psi_* + \tilde{\Phi}\psi_* + |\psi_*|^2\psi_* = \mu_*\psi_* \tag{233}$$

となる。

$\tilde{g}$ がおおきいとき

$$\nabla_*^2\tilde{\Phi} = |\psi_*|^2 \tag{234}$$

$$\tilde{\Phi}\psi_* + |\psi_*|^2\psi_* = \mu_*\psi_* \tag{235}$$

星の外部では $\psi_* = 0$。星の内部では

$$\nabla_*^2|\psi_*|^2 + |\psi_*|^2 = 0 \tag{236}$$

球対称を仮定すると，解は

$$|\psi_*|^2 = \frac{N_B}{4\pi^2}\frac{\sin r_*}{r_*} \tag{237}$$

（ただし，$|\psi_*|^2 > 0$ なので $r_* < \pi$ の場合）

重力質量

$$\begin{aligned} M &= \frac{N_B}{4\pi}\sqrt{\tilde{g}}\frac{M_{pl}^2}{m_B} \\ &= \frac{N_B}{\sqrt{2}(4\pi)^{3/2}}\sqrt{g}\frac{M_{pl}^3}{m_B^2} \end{aligned} \tag{238}$$

一般相対論的な考察（最大質量 $\cdots$ ）については，[15] などを見よ。

## 5.7 重力崩壊

### 5.7.1 重力崩壊 (N)

半径 $r$ の星の表面に粒子があり，星が静止した状態から球対称のまま収縮していくとすると [4]

$$\frac{1}{2}\dot{r}^2 - \frac{GM}{r} = -\frac{GM}{r_0} \tag{239}$$

ここで ˙ は時間微分。圧力などの力は働かないとしている。したがってこの場合，星はダスト状の物質からなるとする。この解を求めるため，

$$r = r_0 \cos^2 \frac{\theta}{2} \tag{240}$$

とおくと

$$\frac{1}{2} r_0^2 \dot{\theta}^2 = \frac{GM}{r_0} \frac{1}{\cos^4 \frac{\theta}{2}} \tag{241}$$

と書き直される。したがって解は

$$t = \sqrt{\frac{r_0^3}{8GM}} (\theta + \sin\theta) \tag{242}$$

と表される。ただし，$t = 0$ のとき $r = r_0$ とした。

$\theta = \pi$ が $r = 0$ に対応するので，星が一点まで収縮するのにかかる時間は

$$t_k \approx \sqrt{\frac{1}{G\rho}} \tag{243}$$

の程度といえる。

#### 5.7.2 重力崩壊 (R)

圧力無し，ダストからなる星の球対称重力崩壊を考えるとき，計量は次のようにとれる ($c = 1$)。[19]

$$-ds^2 = -dt^2 + a^2(t) \left( \frac{dr^2}{1 - r^2} + r^2 (d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) \right) \tag{244}$$

アインシュタイン方程式から

$$\left( \frac{\dot{a}}{a} \right)^2 + \frac{1}{a^2} = \frac{8\pi G}{3} \rho \tag{245}$$

という方程式を得る。

ex. この方程式の解は？ただし，$\rho \propto a^{-3}$ とする。

重力崩壊 (R) は最初にオッペンハイマー・シュナイダーによって研究された。オッペンハイマー・シュナイダー論文 (Phys. Rev. 56 (1939)) の日本語訳（観山正見氏による）が「星の手帖」Vol. 23 １９８４年冬号に載っている。（入手しにくいかな？）

最近でも，重力崩壊には興味深い現象がいろいろ見つかっていて，研究が盛んに行われている。

## 5.8 ブラックホール (R)

星の内部圧力が有効でなくなると，星は重力崩壊を起こし際限なく潰れていく。

前に見たように，ニュートン的取り扱いでも脱出速度が光速となる半径が存在した。

一般相対論的に扱っても，光の出てこられない領域が存在することがわかる。

### 5.8.1 時空の計量

アインシュタイン方程式の真空球対称解は

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{r_g}{r}\right) c^2 dt^2 + \frac{1}{1 - \frac{r_g}{r}} dr^2 + r^2 \left(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2\right) \tag{246}$$

ここで

$$r_g = \frac{2GM}{c^2} \tag{247}$$

別の形の書き方として $r = R\left(1 + \frac{GM}{2Rc^2}\right)^2$ とおけば計量は

$$\begin{aligned} ds^2 &= -\left(\frac{1 - GM/(2Rc^2)}{1 + GM/(2Rc^2)}\right)^2 c^2 dt^2 \\ &+ \left(1 + \frac{GM}{2Rc^2}\right)^4 \left[dR^2 + R^2\left(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2\right)\right] \end{aligned} \tag{248}$$

となる。

動径方向の光の軌道は $ds^2 = 0$ より

$$\frac{dr}{dt} = \pm\left(1 - \frac{r_g}{r}\right) \tag{249}$$

「光の速度」は，$r = r_g$ に近づくと 0 になる！

$r_g$ よりも内側からは光さえも出てこられない。$r = r_g$ の面を「事象の地平線 (horizon)」と呼ぶ。

また，$r_g$ をシュヴァルツシルト半径と呼ぶ。

太陽質量 $M_\odot$ のブラックホールの Schwarzshild 半径は約 3km である。

$10^6 M_\odot$ の質量のブラックホールの Schwarzshild 半径は $\approx 5R_\odot$ である。この程度のブラックホールが銀河中心に存在すると考えられている。

### 5.8.2　ブラックホールの蒸発

ここでは，$G = \hbar = c = k_B = 1$ とする。

black hole の背景では，温度

$$T_H = \frac{1}{8\pi M} \tag{250}$$

の系にいるのと等価である。$T_H$ を Hawking 温度という。
ちなみに，

$$T_H = \frac{\kappa}{2\pi} \tag{251}$$

ここで $\kappa$ はブラックホール表面の重力（加速度）。[23]

熱力学関係式

$$dU = TdS - PdV \tag{252}$$

において，内部エネルギー $U$ を black hole の質量 $M$ と同一視する。（そして $dV = 0$）
さらに温度は Hawking 温度とおくと

$$dM = T_H dS \tag{253}$$

すなわち

$$dS = 8\pi M dM \tag{254}$$

積分すると

$$S = 4\pi M^2 = \frac{4\pi(2M)^2}{4} = \frac{A}{4} \tag{255}$$

ここで $A$ は horizon の表面積。
ブラックホールはエントロピーをもっている！[24]

一般のブラックホールでも，エントロピー $S$ は $A/4$ と表せる。[25]

### 5.8.3　その他のブラックホール

回転している，帯電している，極限の (extreme)，高次元の，低次元の，弦理論の，ブレーン上の，…，ブラックホール。

また，ブラックホールのまわりの降着円盤についてなど，興味深い話題が多くある。

[23] 太陽質量の black hole では，$T_H \sim 10^{-7}$K。
[24] 太陽質量の black hole では，$S \sim 10^{77}$。
[25] $G$ を復活させると，$S = \frac{A}{4G}$。

# 6　銀河，銀河団と重力

## 6.1　銀河の回転曲線

標準的な銀河は，$10^{11}$ 個の星，10kpc のひろがりをもっていて，ゆっくりと回転している。

中心からの距離が $r$ の星が一定の速さ $v$ で円軌道を描いているとすると

$$\frac{v^2}{r} = \frac{GM(r)}{r^2} \tag{256}$$

ここで $M(r)$ は半径 $r$ の球の内部に含まれる質量。
十分 $r$ の大きいところなら $M(r)$ は一定となるはず。したがって十分大きい $r$ については

$$v \propto \frac{1}{\sqrt{r}} \tag{257}$$

となるはずである。しかし観測からは，ほとんどの銀河において，$r$ がかなり大きくても

$$v \approx \text{一定} \tag{258}$$

横軸に $r$，縦軸に $v$ をプロットしたグラフを回転曲線と呼ぶ。ほとんどの銀河で，回転曲線は平坦である。

星の見えないような銀河中心から離れたところにも，質量があるのだろうか？
光らない，このような仮説的物質（物体）を，「ダークマター」と呼んでいる。

## 6.2　銀河団と重力

### 6.2.1　多粒子系のエネルギー

多くの銀河は集まって銀河団を形成している。

銀河を粒子とみなす。互いの重力のみに支配されている系では [14]

$$m_i\ddot{\mathbf{r}}_i = -G \sum_{j\ (i\ \text{以外})} \frac{m_i m_j (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j)}{|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|^3} \tag{259}$$

$\dot{\mathbf{r}}_i$ を内積して，$i$ で和をとる。左辺では

$$\sum_i m_i \ddot{\mathbf{r}}_i \cdot \dot{\mathbf{r}}_i = \frac{d}{dt}\sum_i \frac{1}{2} m_i \dot{\mathbf{r}}_i^2 = \frac{dK}{dt} \tag{260}$$

と書くことができ，一方右辺では

$$\begin{aligned} -G\sum_{i,j}\frac{m_i m_j(\mathbf{r}_i-\mathbf{r}_j)\cdot\dot{\mathbf{r}}_i}{|\mathbf{r}_i-\mathbf{r}_j|^3} &= -G\sum_{i,j}\frac{m_i m_j(\mathbf{r}_j-\mathbf{r}_i)\cdot\dot{\mathbf{r}}_j}{|\mathbf{r}_j-\mathbf{r}_i|^3} \\ &= \frac{1}{2}G\sum_{i,j} m_i m_j \frac{d}{dt}\frac{1}{|\mathbf{r}_i-\mathbf{r}_j|} \\ &= -\frac{dV}{dt} \end{aligned} \tag{261}$$

とかけるので，

$$\frac{d}{dt}(K+V) = \frac{dE_{tot}}{dt} = 0 \tag{262}$$

がいえる。

これは全力学的エネルギーの保存を表している。

### 6.2.2 ビリアル定理

同じ方程式 [14]

$$m_i \ddot{\mathbf{r}}_i = -G\sum_{j\ (i\ \text{以外})}\frac{m_i m_j(\mathbf{r}_i-\mathbf{r}_j)}{|\mathbf{r}_i-\mathbf{r}_j|^3} \tag{263}$$

に今度は $\mathbf{r}_i$ を内積し，$i$ で和をとる。

$$\begin{aligned} \sum_i m_i \ddot{\mathbf{r}}_i \cdot \mathbf{r}_i &= \frac{d^2}{dt^2}\sum_i \frac{1}{2} m_i \mathbf{r}_i^2 - \sum_i m_i \dot{\mathbf{r}}_i^2 \\ &= \frac{d^2}{dt^2} I - 2K \end{aligned} \tag{264}$$

および

$$\begin{aligned} -G\sum_{i,j}\frac{m_i m_j(\mathbf{r}_i-\mathbf{r}_j)\cdot\mathbf{r}_i}{|\mathbf{r}_i-\mathbf{r}_j|^3} &= -G\sum_{i,j}\frac{m_i m_j(\mathbf{r}_j-\mathbf{r}_i)\cdot\mathbf{r}_j}{|\mathbf{r}_j-\mathbf{r}_i|^3} \\ &= -\frac{1}{2}G\sum_{i,j}\frac{m_i m_j}{|\mathbf{r}_i-\mathbf{r}_j|} \\ &= V \end{aligned} \tag{265}$$

となる。

$I$ の２階微分の項は，系が力学的に平衡であるとすれば，平均として０になるので

$$2K + V = 0 \tag{266}$$

を得る。（ビリアル定理）

したがって

$$E_{tot} = K + V = -K = \frac{1}{2}V < 0 \tag{267}$$

$K$ は銀河の運動の観測からわかるので，結局この関係式からポテンシャルの大きさ，つまり系に含まれる質量が求められる。

観測から，光っている星や物質からの寄与では運動を説明するだけの質量が達成できないことがわかる。ここにも「ダークマター」が存在するのだろうか？

２体でのビリアル定理は簡単に証明できる。ここではさらに簡単のため，$M >> m$，また質量 $m$ は等速円運動をしているとしよう。

$$K = \frac{1}{2}mv^2 \tag{268}$$

であり，また

$$V = -\frac{GMm}{R} \tag{269}$$

である。

運動方程式

$$\frac{mv^2}{R} = \frac{GMm}{R^2} \tag{270}$$

より

$$K = -\frac{1}{2}V \tag{271}$$

がいえる。

# 7 膨張宇宙と重力

## 7.1 ニュートン的宇宙

[26]

一様な密度分布をもち，圧力無しの物質（ダスト）を仮定する。[16] 原点から $r$ の位置にある粒子が動径方向に物質とともに運動しているとき，力学的エネルギー保存から

$$\frac{1}{2}\dot{r}^2 - \frac{GM(r)}{r} = \text{一定値} \tag{272}$$

である。ここで $\dot{}$ は時間微分，また

$$M(r) = \frac{4\pi}{3} r^3 \rho \tag{273}$$

である。

物質とともに動く座標を

$$\mathbf{r} = a(t)\mathbf{x} \tag{274}$$

（$x$ は一定。）と表すと $a(t)$ に対する方程式は，一定値を $kc^2x^2/2$ とすると，

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 + \frac{kc^2}{a^2} = \frac{8\pi G}{3}\rho \tag{275}$$

ハッブルの法則，銀河の距離と後退速度が比例すること，は

$$\mathbf{v} = \dot{a}(t)\mathbf{x} = \frac{\dot{a}}{a}\mathbf{r} \equiv H\mathbf{r} \tag{276}$$

のように説明される。

現在のハッブル定数 $H_0$ は，観測から

$$H_0 = 100h\mathrm{km/s/Mpc} \tag{277}$$

$$h \approx 0.5 \sim 0.85 \tag{278}$$

である。

おとめ座銀河団の場合，

$$v = 1200\mathrm{km/s} \tag{279}$$

[26] ゼーリガーのパラドクスについて何か言いたかったけど，割愛。

なので

$$距離 = \frac{v}{H_0} = \frac{1200}{100h}\mathrm{Mpc} = 12h^{-1}\mathrm{Mpc} \tag{280}$$

となる。[27]

熱力学第一法則

$$dE = TdS - PdV \tag{281}$$

において，内部エネルギーを今

$$E = \frac{4\pi}{3}a^3\rho c^2 \tag{282}$$

とすると

$$\frac{dE}{dt} = 4\pi a^2\rho c^2\frac{da}{dt} + \frac{4\pi}{3}a^3\frac{d\rho}{dt}c^2 \tag{283}$$

を得る。一方，

$$\frac{dV}{dt} = 4\pi a^2\frac{da}{dt} \tag{284}$$

であるから，(281) は

$$\dot{\rho} + 3\frac{\dot{a}}{a}\left(\rho + \frac{P}{c^2}\right) = 0 \tag{285}$$

と表される。

ex. (275) と (285) から

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3}\left(\rho + \frac{3P}{c^2}\right) \tag{286}$$

を導け。

(286) は，以下のようにしても導くことができる。[20]
重力ポテンシャルについてのポアソン方程式は

$$\nabla^2\Phi = 4\pi G\rho \tag{287}$$

一方，粒子の流れについての Euler 方程式は[28]

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v}\cdot\nabla)\mathbf{v} = -\nabla\Phi \tag{288}$$

[27] 銀河の距離は普通赤方偏移 $z$ で表す。近くの銀河については，$z = v/c$ となる。おとめ座銀河団の場合，$z \approx 4\times 10^{-3}$。
[28] 圧力の効果（右辺に $-\nabla P/\rho$ の寄与）を無視した。

流れに対する連続の式は

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \nabla\cdot(\rho\mathbf{v}) = 0 \tag{289}$$

ここで物質は空間的に一様なダストだとすると

$$\rho = \frac{C}{a^3(t)} \tag{290}$$

また，

$$\mathbf{v} = \mathbf{x}\frac{\dot{a}}{a} \tag{291}$$

とする。

ポアソン方程式の解は

$$\Phi = \frac{1}{2}x^2\frac{4\pi G\rho}{3} \tag{292}$$

なので，これを用いると

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G\rho}{3} \tag{293}$$

が示される。

## 7.2 相対論的宇宙論

一般相対論では時空全体を扱うことができるので，宇宙自体の物理を議論することができる。

空間について，一様等方性を仮定すると，いくつかの種類の「空間の形」が決定される。

まず，平坦な4次元空間で，半径1の「球面」を考える。それを表す方程式は

$$x^2 + y^2 + z^2 + w^2 = 1 \tag{294}$$

である。

この「球面」上では次のようにパラメータを使うことができる。

$$\begin{aligned} x &= \sin\chi\sin\theta\cos\phi & (295)\\ y &= \sin\chi\sin\theta\sin\phi & (296)\\ z &= \sin\chi\cos\theta & (297)\\ w &= \cos\chi & (298)\end{aligned}$$

したがって,「球面」上での短い距離の自乗は

$$\begin{aligned} d\ell_1^2 &= dx^2 + dy^2 + dz^2 + dw^2 \\ &= d\chi^2 + \sin^2\chi(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) \end{aligned} \tag{299}$$

これが一様等方な空間部分の計量の一つの候補である。

$r = \sin\chi$ とおくと

$$d\ell_1^2 = \frac{dr^2}{1-r^2} + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) \tag{300}$$

また,

$$x^2 + y^2 + z^2 - w^2 = -1 \tag{301}$$

で表される「超曲面」を考える。

この場合

$$x = \sinh\chi\sin\theta\cos\phi \tag{302}$$

$$y = \sinh\chi\sin\theta\sin\phi \tag{303}$$

$$z = \sinh\chi\cos\theta \tag{304}$$

$$w = \cosh\chi \tag{305}$$

とおくことができる。

短い距離の自乗は今度は次のようにとる。

$$\begin{aligned} d\ell_{-1}^2 &= dx^2 + dy^2 + dz^2 - dw^2 \\ &= d\chi^2 + \sinh^2\chi(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) \end{aligned} \tag{306}$$

これも一様等方な空間部分の計量の一つの候補である。

$r = \sinh\chi$ とおくと

$$d\ell_{-1}^2 = \frac{dr^2}{1+r^2} + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) \tag{307}$$

一様等方な空間はつぎのようにまとめられる。

$$d\ell_k^2 = \frac{dr^2}{1-kr^2} + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) \tag{308}$$

ここで $k$ は, $1, 0, -1$ のいずれかである。$k = 0$ の場合は普通のユークリッド的空間である。

$$-ds^2 = -c^2dt^2 + a^2(t)d\ell_k^2 \tag{309}$$

という計量（ロバートソン-ウォーカー計量）でアインシュタイン方程式を書き下すとその一部として

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 + \frac{k}{a^2} = \frac{8\pi G}{3}\rho \tag{310}$$

というハッブル方程式が導かれる。ただし $c = 1$ とした。

ex. (285) は，相対論的に成り立つ。$\nabla_\mu T^\mu_\nu = 0$ と等価であることを示せ。

ex. 以下のような場合にハッブル方程式を解け。

・物質が圧力なしのダストのとき（$k = 1, 0, -1$ について）(Friedmann universe)

$$\rho \propto a^{-3} \tag{311}$$

・物質が光のようにほとんど質量を持たない粒子からなるとき（$k = 0$ について）

$$\rho \propto a^{-4} \tag{312}$$

最近の観測では，物質のほとんどは（７０％）「宇宙項」によるものだとされている。宇宙項の密度と圧力への寄与は

$$P = -\rho c^2 \tag{313}$$

というとても奇妙なものである。

ex. $k = 0$ のとき，宇宙項とダストのみを含む場合のハッブル方程式を解け。

また，のこりの３０％のほとんどは，光らない物質，ダークマターであるらしい。[29]

[29] 宇宙初期の元素合成の理論と観測から，通常の物質の量は非常に少ないらしいことがわかっている。

# 8　初期宇宙と重力

## 8.1　宇宙の大規模構造

現在の宇宙の銀河分布の観測から，銀河の分布には大きな構造が存在することがわかる。これらはどのようにしてできたのだろうか？

## 8.2　ゆらぎからの構造形成

物質分布の小さなゆらぎから天体ができる。[7]

質量：$M$
密度：$\rho$
大きさ：$R$

速度 $V$ で収縮していくとすれば，構造形成の時間は

$$t \approx \frac{R}{V} \tag{314}$$

加速度は重力で与えられる。

$$\frac{V}{t} \approx \frac{GM}{R^2} \tag{315}$$

したがって[30]

$$t \approx \frac{1}{\sqrt{G\frac{M}{R^3}}} \approx \frac{1}{\sqrt{G\rho}} \tag{316}$$

物質が次々圧縮されていくとすれば

$$t < \frac{R}{v_s} \tag{317}$$

でなければならない。ここで $v_s$ は音速。したがって

$$R > v_s t \tag{318}$$

この場合 $M_J \approx \rho\left(\frac{4\pi}{3}R^3\right)$ をジーンズ質量と呼ぶ。

$t \approx 1$ 億年，$v_s \approx 100\mathrm{km/s}$ とすると
$R \approx 3.2 \times 10^{17}\mathrm{km} \approx 10^4\mathrm{pc}$，$\rho \approx 10^{-27}\mathrm{g/cm^3}$，$M_J \approx 1.4 \times 10^{36}\mathrm{kg} \approx 7 \times 10^5 M_\odot$

[30] 重力崩壊のタイムスケールと同じ。

ex. 圧力と重力の均衡条件から求めても良い。[20]

自己重力エネルギーの変分

$$\Delta\left(\frac{GM^2}{R}\right) \approx \Delta\left(G\rho^2 R^5\right) \approx G\rho^2 R^4 \Delta R \tag{319}$$

圧力による仕事（の変分）

$$PR^2\Delta R \tag{320}$$

これらが釣り合うときがジーンズ半径

$$R_J = \frac{1}{\sqrt{G\rho}}\sqrt{\frac{P}{\rho}} \tag{321}$$

## 8.3 ゆらぎの成長

ジーンズ質量程度のゆらぎが，圧力が効かなくなると成長しはじめる。[4] [31]

前にも出てきた基本的な方程式

$$\nabla^2\Phi = 4\pi G\rho \tag{322}$$

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v}\cdot\nabla)\mathbf{v} = -\nabla\Phi \tag{323}$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla\cdot(\rho\mathbf{v}) = 0 \tag{324}$$

において，

$$\rho = \frac{C}{a^3(t)}(1+\delta) = \rho_0(1+\delta) \tag{325}$$

$$\mathbf{v} = \frac{\dot{a}}{a}\mathbf{r} + \mathbf{v}_1 = \mathbf{v}_0 + \mathbf{v}_1 \tag{326}$$

$$\Phi = \frac{1}{2}x^2\frac{4\pi G\rho}{3} + \Phi_1 \tag{327}$$

とすれば $\delta, \mathbf{v}_1, \Phi_1$ の線形近似で

$$\nabla^2\Phi_1 = 4\pi G\rho_0\delta \tag{328}$$

[31] これはちょっと大雑把すぎるかな？（専門家には怒られる？）

$$\frac{\partial \mathbf{v}_1}{\partial t} + (\mathbf{v}_1 \cdot \nabla)\mathbf{v}_0 + (\mathbf{v}_0 \cdot \nabla)\mathbf{v}_1 = -\nabla \Phi_1 \tag{329}$$

$$\frac{\partial \delta}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_0 \cdot \nabla \delta = 0 \tag{330}$$

を得る。

$\frac{d}{dt} \equiv \frac{\partial}{\partial t} + (\mathbf{v}_0 \cdot \nabla)$ とする。また簡単のため長波長のゆらぎのみ考えて $\delta(t)$ とする。

$$\nabla^2 \Phi_1 = 4\pi G \rho_0 \delta \tag{331}$$

$$\frac{d\mathbf{v}_1}{dt} + \frac{\dot{a}}{a}\mathbf{v}_1 = -\nabla \Phi_1 \tag{332}$$

$$\frac{d\delta}{dt} + \nabla \cdot \mathbf{v}_1 = 0 \tag{333}$$

これらから

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \frac{d\mathbf{v}_1}{dt} + \frac{\dot{a}}{a}\nabla \cdot \mathbf{v}_1 &= -\nabla^2 \Phi_1 \\ &= -4\pi G \rho_0 \delta \end{aligned} \tag{334}$$

$$\begin{aligned} \frac{d^2\delta}{dt^2} &= -\frac{d}{dt}\nabla \cdot \mathbf{v}_1 \\ &= -\nabla \cdot \frac{d\mathbf{v}_1}{dt} + \frac{\dot{a}}{a}\nabla \cdot \mathbf{v}_1 \end{aligned} \tag{335}$$

ここで $\nabla = \frac{1}{a}\nabla_{\mathbf{x}}$ であることに注意する。

以上の式から

$$\ddot{\delta} + 2\frac{\dot{a}}{a}\dot{\delta} = 4\pi G \rho_0 \delta \tag{336}$$

を得る。

$a(t) \propto t^{2/3}$ 等を使うと

$$\delta \propto t^{2/3} \propto a(t) \tag{337}$$

がわかる。

例えば $\delta \approx 10^{-4}$ のゆらぎは，宇宙の大きさが $10000$ 倍になる頃には非線形効果が効くくらいに成長している。

## 8.4 very early universe

### 8.4.1 インフレーション

$\rho + 3P/c^2 < 0$ となるような物質の場合，宇宙の大きさは加速的に大きくなる。

特に $\rho + P/c^2 = 0$ の場合，

$$\rho = \rho_v = \text{一定} \tag{338}$$

となることがわかるので，ハッブル方程式の解は $(k = 0)$

$$a(t) \propto e^{Ht} \tag{339}$$

ここで

$$H = \sqrt{\frac{8\pi G}{3}\rho_v} \tag{340}$$

インフレーション時の量子揺らぎが銀河形成の種となる揺らぎになる過程を提供する。

### 8.4.2 位相欠陥

・宇宙ひも　Cosmic string

まっすぐな「相対論的」“ひも”のつくるエネルギー運動量テンソル $(c = 1)$

$$T^\mu_\nu = \mu\delta(x)\delta(y)\begin{pmatrix} -1 & & & \\ & 0 & & \\ & & 0 & \\ & & & -1 \end{pmatrix} \tag{341}$$

ここで $\mu$ は線密度。$\mu = v^2$

これを Einstein eq に代入すると解は

$$-ds^2 = -dt^2 + dz^2 + dr^2 + (1 - 8G\mu)r^2 d\theta^2 \tag{342}$$

ここで

$$\sqrt{1 - 8G\mu}\theta = \theta' \tag{343}$$

と書くと

$$ds^2 = -dt^2 + dz^2 + dr^2 + r^2 d\theta'^2 \tag{344}$$

（平坦な空間）

宇宙ひもがまっすぐで静止していれば，まわりでは重力を感じない。

ただし

$$0 < \theta' < 2\pi\sqrt{1-8G\mu} \tag{345}$$

でなければならない …「円錐」のような空間。

$v =$（大統一理論のスケール）$\sim 10^{16}\mathrm{GeV}$

$$G\mu \sim Gv^2 \sim 10^{-6}\left(\frac{v}{10^{16}\mathrm{GeV}}\right)^2 \tag{346}$$

注目すべきことは

ひもの力にとどまっていても重力を感じない[32]

しかし存在したとしたら近よるな！

もし存在すれば光速に近いので，やはり危険である。

$$10^{-6} \times 3 \times 10^{8}\mathrm{m/s} = 300\mathrm{m/s} \tag{347}$$

ひもの通過後，両側の物質はこのくらいの速度でぶつかり合う。

宇宙論における“ひも”　cosmic string　の興味深いところ

① それ自身の重力はほとんどない

② ちぎれると重力作用をもつ←銀河の種

③ ひもの航路上に物質を集める→大規模構造

ひもがたくさんある場合，

それのつくるエネルギー密度

単位長さあたりの質量密度 $\sim \mu$ $(G\mu \sim 10^{-6})$

$$\rho_{cs} \propto \frac{\mu}{a^2} \tag{348}$$

ハッブル方程式

$$3\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 + 3\frac{k}{a^2} = 8\pi G\rho \tag{349}$$

$$\rho = \rho_m + \rho_{cs} = \frac{\rho_0}{a^3} + \frac{\rho_{cs0}}{a^2} \tag{350}$$

cosmic strings の寄与は曲率と同じ程度のきき方

Friedmann 宇宙のふるまいに影響は少ない

[32] 空間を，ひもの伸びている方向と 2 次元空間の積ととらえれば，この奇妙な性質は 3 次元時空におけるアインシュタイン重力の性質に由来することがわかる。

# 9　量子重力

$G$ は物理的な次元を持った定数。
量子化は困難。

プランク長さ　$\sqrt{\frac{G\hbar}{c^4}} \approx 10^{-33}\mathrm{cm}$
プランク時間　$10^{-43}\mathrm{s}$
プランクエネルギー　$\sqrt{\frac{\hbar c}{G}}c^2 \approx 10^{19}\mathrm{GeV}$

以上のようなスケールを持つ系については，量子重力の効果が無視できなくなるであろう。

## 9.1　量子宇宙論

計量を $(c=1)$

$$-ds^2 = \sigma^2\left[-N^2dt^2 + a^2(t)d\ell_1^2\right] \tag{351}$$

とする。ここで $\sigma^2 = \frac{2G}{3\pi}$ である。
重力の作用（アインシュタイン-ヒルベルト アクション）プラス宇宙項の作用

$$S = \frac{1}{16\pi G}\int d^4x\sqrt{-g}\,(R - 2\Lambda) \tag{352}$$

にさきの計量を代入すると

$$S = \int Ldt = \int N\left[\frac{1}{2}a\left(1 - \frac{\dot{a}^2}{N^2}\right) - a^3\frac{\Lambda}{6}\right] \tag{353}$$

ex. $N$ で変分すると，ハッブル方程式が出ることを確かめよ。

正準共役量 $\Pi$ を

$$\Pi = \frac{\partial L}{\partial \dot{a}} = -\frac{a\dot{a}}{N} \tag{354}$$

とするとハミルトニアン $H$ は

$$\begin{aligned} H &= \Pi\dot{a} - L \\ &= N\left\{\frac{1}{2}\left[-\frac{1}{a}\Pi^2 - a\right] + \frac{\Lambda}{6}a^3\right\} \equiv N\mathcal{H} \end{aligned} \tag{355}$$

$N$ で変分すると $\mathcal{H} = 0$！となっている。閉じた宇宙では，物質と重力のエネルギーの総和は 0 であることになっている。

正準量子化の手続き

$$\Pi \to -i\frac{d}{da} \qquad (\hbar = 1) \tag{356}$$

にしたがい，波動関数 $\Psi$ を用意して

$$\mathcal{H}\Psi = 0 \tag{357}$$

を波動方程式としよう。

$$\left[-\frac{d^2}{da^2} + a^2 - \frac{\Lambda}{3}a^4\right]\Psi = 0 \tag{358}$$

有効ポテンシャル

$$V_{eff} = a^2 - \frac{\Lambda}{3}a^4 \tag{359}$$

は「山」をもつ。

ホーキング　経路積分　無境界境界条件
ヴィレンキン　無から (from nothing) の宇宙の創造
量子力学的トンネリング

## 9.2　弦理論とM理論

弦理論（ストリング理論）では，ひもの振動が様々な粒子を表す。閉じたひも（「わっか」）の理論には，必ず重力相互作用が含まれる（米谷）。

最近，brane という高次元の「膜」のような構造が存在しうることがわかった。さらに「双対性」という性質などを使って，弦理論を統一した「M理論」についての研究が盛んである。

われわれは一つのブレーンの上に住んでいる可能性がある。その場合にも重力は，空間を高次元を伝わる。[33]

このような考え方によると，なぜ重力だけが他の力よりも極端に「弱い」かが自然に説明できる。

高次元の存在のため，mm くらいで逆自乗則からのずれが期待される。[34]

[33] 必ずしも「自由に」伝わらないが。

[34] 細かくはモデルによるが，例えば単純に $r$ 離れた 2 物体の間の重力の大きさは，空間の次元が $D$ のとき，$\propto 1/r^{D-1}$ となる。このような影響が短い距離で期待される。

## 10　重力波

連星からの重力波放出の確認の功績により，ハルス，テイラーは 1993 年ノーベル賞を受賞した。

ここでは，平坦な時空からの小さなずれについて考える。

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu} \tag{360}$$

$h_{\mu\nu}$ の添え字の上げ下げは $\eta^{\mu\nu}$ 等でおこなう。

リーマン曲率は

$$R_{\lambda\sigma\beta\alpha} \approx -\frac{1}{2}\left(\partial_\lambda\partial_\beta h_{\alpha\sigma} - \partial_\lambda\partial_\alpha h_{\beta\sigma} - \partial_\sigma\partial_\beta h_{\lambda\alpha} + \partial_\sigma\partial_\alpha h_{\lambda\beta}\right) \tag{361}$$

リッチ曲率は

$$R_{\sigma\alpha} \approx -\frac{1}{2}\left(\Box h_{\alpha\sigma} - \partial_\alpha\partial_\lambda h^\lambda_\sigma - \partial_\sigma\partial_\lambda h^\lambda_\alpha + \partial_\sigma\partial_\alpha h\right) \tag{362}$$

ここで

$$h \equiv h^\mu_\mu = \eta^{\mu\nu}h_{\mu\nu} \tag{363}$$

スカラー曲率は

$$R \approx \eta^{\mu\nu}R_{\mu\nu} = -\Box h + \partial_\sigma\partial_\lambda h^{\lambda\sigma} \tag{364}$$

アインシュタインテンソルは

$$\begin{aligned} R_{\sigma\alpha} - \frac{1}{2}g_{\sigma\alpha}R &\approx R_{\sigma\alpha} - \frac{1}{2}\eta_{\sigma\alpha}R \\ \approx\ & -\frac{1}{2}\left(\Box h_{\alpha\sigma} - \partial_\alpha\partial_\lambda h^\lambda_\sigma - \partial_\sigma\partial_\lambda h^\lambda_\alpha + \partial_\sigma\partial_\alpha h - \Box h\eta_{\sigma\alpha} + \partial_\beta\partial_\lambda h^{\lambda\beta}\eta_{\sigma\alpha}\right) \end{aligned} \tag{365}$$

となる。

ここで

$$\tilde{h}_{\mu\nu} \equiv h_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}h \tag{366}$$

とし，ゲージ条件[35]

$$\partial_\mu\tilde{h}^\mu_\nu \equiv 0 \tag{367}$$

[35] $g^{\mu\nu}\Gamma_{\mu\nu} = 0$ と等価。

を課すと，アインシュタイン方程式より

$$\Box \tilde{h}_{\mu\nu} = -\frac{16\pi G}{c^4} T_{\mu\nu} \tag{368}$$

を得る。

この方程式は，物質の保存の式と矛盾しない。

また，物質のない真空では，波動方程式である。

アメリカでは LIGO，日本では TAMA300 などの重力波観測装置が来世紀観測を始める？

# 11 Appendix

## 11.1 定数

おもに [17] から採った。

| | | |
|---|---|---|
| 光速 | $c$ | 299792458m/s |
| 重力定数 | $G$ | $6.67259(85) \times 10^{-11}\mathrm{m}^3\mathrm{kg}^{-1}\mathrm{s}^{-2}$ |
| 天文単位 | $AU$ | $1.4959787066(2) \times 10^8\mathrm{km}$ |

| | | |
|---|---|---|
| プランク質量 | $\sqrt{\hbar c/G}$ | $1.221047(79) \times 10^{19}\mathrm{GeV/c}^2$ |
| | | $= 2.17671(14) \times 10^{-8}\mathrm{kg}$ |
| パーセク | pc | $3.0856775807(4) \times 10^{16}\mathrm{m}$ |
| | | $= 3.262\ldots\mathrm{ly}$ |
| 光年 | ly | $0.3066\ldots\mathrm{pc}$ |
| | | $= 0.9461\ldots \times 10^{16}\mathrm{m}$ |
| 太陽のシュバルツシルト半径 | $2GM_\odot/c^2$ | 2.95325008km |
| 太陽質量 | $M_\odot$ | $1.98892(25) \times 10^{30}\mathrm{kg}$ |
| 太陽（赤道）半径 | $R_\odot$ | $6.96 \times 10^8\mathrm{m}$ |
| 地球質量 | $M_\oplus$ | $5.97370(76) \times 10^{24}\mathrm{kg}$ |
| 地球（赤道）半径 | $R_\oplus$ | $6.378140 \times 10^6\mathrm{m}$ |

| | |
|---|---|
| 銀河系中心まわりの太陽の回転速度 | 220(20)km/s |
| 銀河系中心と太陽の距離 | 8.0(5)kpc |

## 11.2 球殻のつくる重力ポテンシャル

$$\Phi(r) = -2\pi a^2 G\lambda \int_0^\pi \frac{\sin\theta d\theta}{\sqrt{r^2 + a^2 - 2ar\cos\theta}} \tag{369}$$

$$\int_{-1}^{1} \frac{dx}{\sqrt{r^2 + a^2 - 2arx}} = \left[\frac{\sqrt{r^2 + a^2 - 2arx}}{-ar}\right]_{-1}^{1} \tag{370}$$

$$r > a \text{ のとき} \quad \frac{2}{r} \tag{371}$$

$$r < a \text{ のとき} \quad \frac{2}{a} \tag{372}$$

$$r > a \text{ のとき} \quad \Phi = \frac{G4\pi a^2\lambda}{r} \tag{373}$$

$$r < a \text{ のとき} \quad \Phi = \frac{G4\pi a^2\lambda}{a} \tag{374}$$

## 11.3 曲率

リーマン曲率

$$R^{\mu}{}_{\sigma\beta\alpha} = \partial_\beta \Gamma^{\mu}_{\sigma\alpha} - \partial_\alpha \Gamma^{\mu}_{\sigma\beta} + \Gamma^{\mu}_{\rho\beta}\Gamma^{\rho}_{\sigma\alpha} - \Gamma^{\mu}_{\rho\alpha}\Gamma^{\rho}_{\sigma\beta} \tag{375}$$

リッチ曲率

$$R_{\sigma\alpha} = R^{\mu}{}_{\sigma\mu\alpha} = \partial_\mu \Gamma^{\mu}_{\sigma\alpha} - \partial_\alpha \Gamma^{\mu}_{\sigma\mu} + \Gamma^{\mu}_{\rho\mu}\Gamma^{\rho}_{\sigma\alpha} - \Gamma^{\mu}_{\rho\alpha}\Gamma^{\rho}_{\sigma\mu} \tag{376}$$

## 11.4 球対称時空の曲率

計量として，次のものを仮定する。

$$-ds^2 = -e^{-2\delta}\Delta dt^2 + \frac{dr^2}{\Delta} + r^2 d\Omega_2^2 \tag{377}$$

$\Delta, \delta$ は $r$ のみの関数と仮定する。ここで

$$\begin{aligned} d\Omega_2^2 &= d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2 \\ &= \tilde{g}_{ij} dx^i x^j \qquad (i, j = 2, 3) \end{aligned} \tag{378}$$

計算すると

$$\Gamma^{t}_{rt} = -\delta' + \frac{1}{2}\frac{\Delta'}{\Delta} \tag{379}$$

$$\Gamma^{r}_{tt} = e^{-2\delta}\Delta^2\left(-\delta' + \frac{1}{2}\frac{\Delta'}{\Delta}\right) \tag{380}$$

$$\Gamma^{r}_{rr} = -\frac{1}{2}\frac{\Delta'}{\Delta} \tag{381}$$

$$\Gamma^{r}_{ij} = -\Delta r \tilde{g}_{ij} \tag{382}$$

$$\Gamma^{i}_{rj} = \frac{1}{r}\delta^{i}_{j} \tag{383}$$

$$\Gamma^{i}_{jk} = \tilde{\Gamma}^{i}_{jk} \tag{384}$$

$$
\begin{aligned}
\Gamma^{\lambda}_{t\lambda} &= 0 && (385)\\
\Gamma^{\lambda}_{r\lambda} &= \Gamma^{t}_{rt} + \Gamma^{r}_{rr} + \Gamma^{k}_{rk} = -\delta' + \frac{2}{r} && (386)\\
\Gamma^{\lambda}_{i\lambda} &= \tilde{\Gamma}^{k}_{ik} && (387)
\end{aligned}
$$

これらを用いリッチ曲率

$$
R_{\sigma\nu} = \partial_\lambda \Gamma^{\lambda}_{\nu\sigma} - \partial_\nu \Gamma^{\lambda}_{\sigma\lambda} + \Gamma^{\lambda}_{\rho\lambda}\Gamma^{\rho}_{\nu\sigma} - \Gamma^{\lambda}_{\nu\rho}\Gamma^{\rho}_{\sigma\lambda} \tag{388}
$$

を計算する。

$$
\begin{aligned}
R_{tt} &= \partial_r \Gamma^{r}_{tt} - 0 + \Gamma^{r}_{tt}\Gamma^{\lambda}_{r\lambda} - 2\Gamma^{r}_{tt}\Gamma^{t}_{tr} \\
&= \left[e^{-2\delta}\Delta^2\left(-\delta' + \frac{1}{2}\frac{\Delta'}{\Delta}\right)\right]' \\
&+ e^{-2\delta}\Delta^2\left(-\delta' + \frac{1}{2}\frac{\Delta'}{\Delta}\right)\left[-\delta' + \frac{2}{r}\right] \\
&- 2e^{-2\delta}\Delta^2\left(-\delta' + \frac{1}{2}\frac{\Delta'}{\Delta}\right)^2 \\
&= e^{-2\delta}\Delta^2\left(-\delta' + \frac{1}{2}\frac{\Delta'}{\Delta}\right)' \\
&+ e^{-2\delta}\Delta^2\left(-\delta' + \frac{1}{2}\frac{\Delta'}{\Delta}\right)\left[-\delta' + \frac{2}{r} + \frac{\Delta'}{\Delta}\right]
\end{aligned} \tag{389}
$$

$$
\begin{aligned}
R_{rr} &= \partial_r \Gamma^{r}_{rr} - \partial_r \Gamma^{\lambda}_{r\lambda} + \Gamma^{r}_{rr}\Gamma^{\lambda}_{r\lambda} - \left({\Gamma^{t}_{rt}}^{2} + {\Gamma^{r}_{rr}}^{2} + \Gamma^{i}_{rj}\Gamma^{j}_{ri}\right) \\
&= \left(-\frac{1}{2}\frac{\Delta'}{\Delta}\right)' - \left[-\delta' + \frac{2}{r}\right]' + \left(-\frac{1}{2}\frac{\Delta'}{\Delta}\right)\left[-\delta' + \frac{2}{r}\right] \\
&- \left(-\delta' + \frac{1}{2}\frac{\Delta'}{\Delta}\right)^2 - \left(-\frac{1}{2}\frac{\Delta'}{\Delta}\right)^2 - \frac{2}{r^2} \\
&= -\left[-\delta' + \frac{2}{r} + \frac{1}{2}\frac{\Delta'}{\Delta}\right]' + \left(-\frac{1}{2}\frac{\Delta'}{\Delta}\right)\left[-\delta' + \frac{2}{r} + \frac{1}{2}\frac{\Delta'}{\Delta}\right] \\
&- \left(-\delta' + \frac{1}{2}\frac{\Delta'}{\Delta}\right)^2 - \frac{2}{r^2}
\end{aligned} \tag{390}
$$

$$
\begin{aligned}
R_{ij} &= \partial_r \Gamma^r_{ij} + \partial_k \Gamma^k_{ij} - \partial_i \Gamma^\lambda_{j\lambda} + \Gamma^r_{ij}\Gamma^\lambda_{r\lambda} + \Gamma^k_{ij}\Gamma^\lambda_{k\lambda} - \left(2\Gamma^k_{ri}\Gamma^r_{jk} + \Gamma^k_{\ell i}\Gamma^\ell_{jk}\right) \\
&= [-\Delta r]' \tilde{g}_{ij} + \partial_k \tilde{\Gamma}^k_{ij} - \partial_i \tilde{\Gamma}^k_{jk} + [-\Delta r]\left[-\delta' + \frac{2}{r}\right]\tilde{g}_{ij} \\
&+ \tilde{\Gamma}^k_{ij}\tilde{\Gamma}^\ell_{k\ell} - 2[-\Delta]\tilde{g}_{ij} - \tilde{\Gamma}^k_{\ell i}\tilde{\Gamma}^\ell_{jk} \\
&= \tilde{R}_{ij} - \Delta r\left[-\delta' + \frac{1}{r} + \frac{\Delta'}{\Delta}\right]\tilde{g}_{ij}
\end{aligned} \tag{391}
$$

## 11.5　一様等方宇宙モデルの曲率

ロバートソン-ウォーカー計量 $(c=1)$

$$
-ds^2 = -dt^2 + a^2(t)\left[\frac{dr^2}{1-kr^2} + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2)\right] \tag{392}
$$

から計算すると

$$
\Gamma^0_{11} = a\frac{da}{dt} \tag{393}
$$

$$
\Gamma^0_{22} = a\frac{da}{dt}\left\{\begin{array}{c}\sin^2\chi \\ \chi^2 \\ \sinh^2\chi\end{array}\right\}, \quad \Gamma^0_{33} = \Gamma^0_{22}\sin^2\theta \tag{394}
$$

$$
\Gamma^1_{01} = \Gamma^1_{10} = \Gamma^2_{02} = \Gamma^2_{20} = \Gamma^3_{03} = \Gamma^3_{30} = \frac{1}{a}\frac{da}{dt} \tag{395}
$$

$$
\Gamma^1_{22} = -\left\{\begin{array}{c}\sin\chi\cos\chi \\ \chi \\ \sinh\chi\cosh\chi\end{array}\right\}, \quad \Gamma^1_{33} = \Gamma^1_{22}\sin^2\theta \tag{396}
$$

$$
\Gamma^2_{12} = \Gamma^2_{21} = \Gamma^3_{13} = \Gamma^3_{31} = \left\{\begin{array}{c}\frac{\cos\chi}{\sin\chi} \\ \frac{1}{\chi} \\ \frac{\cosh\chi}{\sinh\chi}\end{array}\right\} \tag{397}
$$

$$
\Gamma^2_{33} = -\sin\theta\cos\theta, \quad \Gamma^3_{23} = \Gamma^3_{32} = \frac{\cos\theta}{\sin\theta} \tag{398}
$$

これらを用いると

$$
\Gamma^\nu_{\nu 0} = \Gamma^1_{10} + \Gamma^2_{20} + \Gamma^3_{30} = 3\frac{1}{a}\frac{da}{dt} \tag{399}
$$

$$\Gamma^{\nu}_{\ \nu 1} = \Gamma^{2}_{21} + \Gamma^{3}_{31} = 2\left\{\begin{array}{c} \frac{\cos\chi}{\sin\chi} \\ \frac{1}{\chi} \\ \frac{\cosh\chi}{\sinh\chi} \end{array}\right\} \tag{400}$$

$$\Gamma^{\nu}_{\ \nu 2} = \Gamma^{3}_{32} = \frac{\cos\theta}{\sin\theta} \tag{401}$$

**リッチ曲率の成分の計算**

$$R_{\mu\sigma} = \partial_{\nu}\Gamma^{\nu}_{\ \sigma\mu} - \partial_{\sigma}\Gamma^{\nu}_{\ \nu\mu} + \Gamma^{\lambda}_{\ \sigma\mu}\Gamma^{\nu}_{\ \nu\lambda} - \Gamma^{\lambda}_{\ \nu\mu}\Gamma^{\nu}_{\ \sigma\lambda} \tag{402}$$

$$\begin{aligned} R_{00} &= 0 - 3\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{a}\frac{da}{dt}\right) + 0 - 3\left(\frac{1}{a}\frac{da}{dt}\right)^2 \\ &= -3\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{a}\frac{da}{dt}\right) - 3\left(\frac{1}{a}\frac{da}{dt}\right)^2 \\ &= -3\frac{1}{a}\frac{d^2a}{dt^2} \end{aligned} \tag{403}$$

$$\begin{aligned} R_{11} &= \frac{d}{dt}\left(a\frac{da}{dt}\right) - 2\left\{\begin{array}{c} -\frac{1}{\sin^2\chi} \\ -\frac{1}{\chi^2} \\ -\frac{1}{\sinh^2\chi} \end{array}\right\} \\ &+ \left(a\frac{da}{dt}\right)\left(3\frac{1}{a}\frac{da}{dt}\right) - \left(2a\frac{da}{dt}\frac{1}{a}\frac{da}{dt} + 2\left\{\begin{array}{c} \frac{\cos^2\chi}{\sin^2\chi} \\ \frac{1}{\chi^2} \\ \frac{\cosh^2\chi}{\sinh^2\chi} \end{array}\right\}\right) \\ &= a\frac{d^2a}{dt^2} + 2\left(\frac{da}{dt}\right)^2 + 2\left\{\begin{array}{c} +1 \\ 0 \\ -1 \end{array}\right\} \end{aligned} \tag{404}$$

**$R_{22}$，$R_{33}$ について計算してみよ。**

**他の成分は？**

まとめ

$$
\begin{aligned}
R_{00} &= -3\frac{1}{a}\frac{d^2a}{dt^2} && (405)\\
R_{11} &= a\frac{d^2a}{dt^2} + 2\left(\frac{da}{dt}\right)^2 + 2k && (406)\\
R_{22} &= \left[a\frac{d^2a}{dt^2} + 2\left(\frac{da}{dt}\right)^2 + 2k\right]\left\{\begin{array}{c}\sin^2\chi\\ \chi^2\\ \sinh^2\chi\end{array}\right\} && (407)\\
R_{33} &= \left[a\frac{d^2a}{dt^2} + 2\left(\frac{da}{dt}\right)^2 + 2k\right]\left\{\begin{array}{c}\sin^2\chi\\ \chi^2\\ \sinh^2\chi\end{array}\right\}\sin^2\theta && (408)
\end{aligned}
$$

ここで

$$
k = \left\{\begin{array}{c}+1\\ 0\\ -1\end{array}\right\} \tag{409}
$$

なお，その他の成分はゼロ。

さらにまとめると

$$
\begin{aligned}
R_{00} &= -3\frac{1}{a}\frac{d^2a}{dt^2} && (410)\\
R_{ij} &= \left\{\frac{1}{a}\frac{d^2a}{dt^2} + 2\frac{1}{a^2}\left[\left(\frac{da}{dt}\right)^2 + k\right]\right\}g_{ij} && (411)
\end{aligned}
$$

$(i, j = 1, 2, 3)$

$$
\begin{aligned}
-ds^2 &= -dt^2 + g_{ij}dx^i dx^j && (412)\\
&= -dt^2 + a^2\left[d\chi^2 + \left\{\begin{array}{c}\sin^2\chi\\ \chi^2\\ \sinh^2\chi\end{array}\right\}\left(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2\right)\right] && (413)
\end{aligned}
$$

**スカラー曲率**

$$\begin{aligned}
R &= g^{\mu\nu}R_{\mu\nu} \\
&= 3\frac{1}{a}\frac{d^2a}{dt^2} + 3\left\{\frac{1}{a}\frac{d^2a}{dt^2} + 2\frac{1}{a^2}\left[\left(\frac{da}{dt}\right)^2 + k\right]\right\} \\
&= 6\left\{\frac{1}{a}\frac{d^2a}{dt^2} + \frac{1}{a^2}\left[\left(\frac{da}{dt}\right)^2 + k\right]\right\} \qquad (414)
\end{aligned}$$

**アインシュタイン方程式**

$$R^\mu_\nu - \frac{1}{2}\delta^\mu_\nu R = 8\pi G T^\mu_\nu \qquad (415)$$

**の左辺は**

$$\begin{aligned}
R^0_0 - \frac{1}{2}R &= 3\frac{1}{a}\frac{d^2a}{dt^2} - 3\left\{\frac{1}{a}a\frac{d^2a}{dt^2} + \left[\frac{1}{a^2}\left(\frac{da}{dt}\right)^2 + k\right]\right\} \\
&= -3\frac{1}{a^2}\left[\left(\frac{da}{dt}\right)^2 + k\right] \qquad (416)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
R^i_j - \frac{1}{2}\delta^i_j R &= \left[\left\{\frac{1}{a}a\frac{d^2a}{dt^2} + 2\frac{1}{a^2}\left[\left(\frac{da}{dt}\right)^2 + k\right]\right\}\right. \\
&- \left. 3\left\{\frac{1}{a}\frac{d^2a}{dt^2} + \frac{1}{a^2}\left[\left(\frac{da}{dt}\right)^2 + k\right]\right\}\right]\delta^i_j \\
&= \left\{-2\frac{1}{a}a\frac{d^2a}{dt^2} - \frac{1}{a^2}\left[\left(\frac{da}{dt}\right)^2 + k\right]\right\}\delta^i_j \qquad (417)
\end{aligned}$$

# 参考文献


[1] 江沢洋　物理は自由だ　日本評論社

[2] 江里口良治　宇宙の科学　東京大学出版会

[3] 佐藤文隆　ブラックホール　中公自然選書

[4] 佐藤文隆　いまさら宇宙論？　パリティブックス　丸善

[5] 杉本大一郎（編著）　天体と宇宙の進化 I　放送大学教育振興会

[6] 杉本大一郎　宇宙とその歴史　放送大学教育振興会

[7] 祖父江義明　宇宙を計算しよう　ニュートン別冊「自然にひそむ数のミステリー」

[8] 中村卓史　連星パルサーと重力波天文学　別冊・数理科学「重力理論」

[9] バージャー・オルソン　力学-新しい視点に立って-　培風館

[10] ファインマン　ファインマン，力学を語る　岩波書店

[11] 藤井保憲　相対論　放送大学教育振興会

[12] 堀源一郎　宇宙法則の謎　丸善

[13] R. D'Inverno, Introducing Einstein's Relativity　(Oxford)

[14] Neb Duric, PHY536 (http://tesla.phys.unm.edu/phy536/)　(University of New Mexico)

[15] P. Jetzer, Phys. Rep. **220**, 163 (1992).

[16] A. Liddle, An Introduction to Modern Cosmology (Wiley)

[17] Particle Data Group, Particle Physics Booklet

[18] Princeton Problems in Physics with Solutions, Princeton.

[19] S. Weinberg, Gravitation and Cosmology.

[20] A. Zee, Unity of Force in the Universe　(World Scientific)