

# 量子力学 II

## 期末テスト

1. エルミート多項式  $H_n(x)$  の母関数は

$$\exp(2xt - t^2) = \sum_{n=0}^{\infty} H_n(x) \frac{t^n}{n!} \quad (1)$$

である。また、直交関係式

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp(-x^2) H_n(x) H_m(x) dx = \begin{cases} 0 & n \neq m \text{ のとき} \\ \sqrt{\pi} 2^n n! & n = m \text{ のとき} \end{cases} \quad (2)$$

が成立する。

以下の問いに答えなさい。

(a) 次の漸化式を証明しなさい。

$$H_{n+1}(x) - 2xH_n(x) + 2nH_{n-1}(x) = 0 \quad (3)$$

$$H'_n(x) = 2nH_{n-1}(x) \quad (4)$$

(b) 次の式を証明しなさい。

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp(-x^2) x^2 [H_n(x)]^2 dx = \sqrt{\pi} 2^n n! \left( n + \frac{1}{2} \right) \quad (5)$$

2. 真空中の磁場内で運動する質量  $m$ 、電荷  $-e$  の電子を考える。この磁場は、ベクトルポテンシャル  $\mathbf{A} = (A_x, A_y, A_z)$  を用いて、 $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$  によって表すことができる。以下の問いに答えなさい。

(a) 以下のような方法で古典的なハミルトニアン  $H$  を求めてみよう。

i. ラグランジアン  $L$  は

$$L = \frac{m}{2} (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - e(\dot{x}A_x + \dot{y}A_y + \dot{z}A_z)$$

で与えられる。ラグランジアン  $L$  を用いて、運動量  $p_x$  が、

$$p_x = m\dot{x} - eA_x$$

となることを示しなさい。同様に  $p_y, p_z$  を求めなさい。ただし  $\dot{x} = \frac{dx}{dt}$ ,  $\dot{y} = \frac{dy}{dt}$ ,  $\dot{z} = \frac{dz}{dt}$  である。

ii. ハミルトニアン  $H$  は

$$H = p_x \dot{x} + p_y \dot{y} + p_z \dot{z} - L$$

で与えられる。ハミルトニアンを  $p_x, p_y, p_z, A_x, A_y, A_z, m, e$  を用いて表しなさい。

(b) 次に電子の運動を量子力学的に考えよう。今、ベクトルポテンシャル  $\mathbf{A}$  を、磁場の大きさ  $B$  を用いて、 $\mathbf{A} = (0, xB, 0)$  とする。

i. 量子力学におけるハミルトニアン  $\hat{H}$  を求めなさい。

ii. ハミルトニアン  $\hat{H}$  の固有関数  $\phi(x, y, z)$  を

$$\phi(x, y, z) = f(x) \exp[i(k_y y + k_z z)]$$

とする。ただし、 $k_y, k_z$  は電子の波数ベクトルの  $y$  成分、 $z$  成分である。エネルギー固有値を求めなさい。

以上

参考： 一次元調和振動子のハミルトニアンは

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{1}{2} m \omega^2 x^2$$

で、固有値は

$$\left(n + \frac{1}{2}\right) \hbar \omega \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

である。